

新しい統計解析手法とその金融データへの適用

総合政策学部 4 年 木上貴史

総合政策学部 4 年 風岡宏樹

岡部光明研究会研究論文

2007 年度春学期（2007 年 8 月改訂）

本稿の作成にあたっては、日頃から丁寧で親切なご指導をしてくださった岡部光明教授（慶應義塾大学総合政策学部）に深く感謝と敬意を表したい。また、岡部光明研究会のメンバーには、研究会や共同研究室（κ201）での議論においてとても有益かつ参考になる意見を頂き感謝している。なお、本稿はインターネット上においても全文アクセスおよびダウンロード可能である。（<http://web.sfc.keio.ac.jp/~okabe/paper/>）また、本稿に関するコメントや問題点等は、著者にご連絡いただきたい。

電子メールアドレス：木上 s04230tk@sfc.keio.ac.jp、風岡 s04191hk@sfc.keio.ac.jp

概要

近年の経済統計の分析においては、統計学自体が進歩していることに加え、物理学や生物学において用いられる手法の援用も増えるなど、手法の多様化と発展が顕著である。これらは当然ながら高度に専門的であり初学者が容易に利用できるものではないが、本稿ではこれらのうち二つの新しい手法を著者なりに理解するとともに、その理解の妥当性を確認するため実際の金融データに適用することを試みた。その結果、比較的納得のゆく分析結果が得られたので、用いた解析手法をややていねいに解説するとともに、適用結果を記述した。

まず第1部「不動産投資におけるリスクと価格決定-リスク中立確率のもとでのエッシャー変換を用いて-」では、不動産投資とREIT（不動産投資信託）の概要を取りまとめるとともに、不動産投資のプライシングを解説し、次いでJ-REIT（日本版不動産投資信託）先物価格の推定を行った。近年、日本では景気上昇が続き、不動産価格も大幅に高騰している。不動産投資は代替投資（預貯金・株式・債券などの伝統的な資産ではなく未公開株式や天候デリバティブズなどへの投資）の一つに挙げられ、その価値は理論的にブラック・ショールズ式などから求めることができる。しかし、このような代替投資の対象となる原資産は、株式や債券などとは異なって流動性が低いため、従来の価格決定モデルをそのまま適用することは困難である。このためここでは、不動産一般の価格を決定するモデルを導入するとともに、リスク愛好型とリスク回避型の2つのタイプの投資家を考慮し、危険回避度や危険の大きさをモデルに盛り込むためにエッシャー変換を使ってモデリングした。このモデルの妥当性を確かめるため、東証REIT指数を用いてエッシャーパラメーター（危険回避度）を推定し、それを変化させた時の先物価格をモンテカルロ・シミュレーションによって推定した。その結果、リスク愛好型になるにつれ先物価格が上昇することが判明した。これは、リスク愛好度が強まる場合には不確実性が大きい先物に対する需要が増大することを考えれば、妥当な結果と判断される。

第2部「マルコフ連鎖モンテカルロ法の理解と実践 - TOPIX に対する感応度 β の

推定」では、近年、米国の学会等で注目されている「マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC : Markov Chain Monte Carlo) 法」という手法の概要を解説し、ついで現実のデータに対する適用を試みた。MCMC を利用すれば、確率変数である未知のパラメータ θ の平均値・標準偏差を求めることが出来る。すなわち、まず「マルコフ連鎖」(現時点の値が一期前の値からのみ影響を受けそれより前の値からは独立であるという確率過程) の 2 つの要件である、未知のパラメータ θ の初期分布 $p(\theta_0)$ と推移核 $p(\theta_n|\theta_{n-1})$ を仮定し、ついで無数の乱数列を発生させれば θ の新たな確率分布が求まるので、上記の算出が可能となる。このような MCMC は、日本でもようやく知名度が高まってきた。しかし、回帰分析やニューラルネットワークのような手法とは異なり、大学生でも読みこなせる入門書や、実際に動かすことができるプログラム例などがいまだほとんどないため、初学者が学習・活用するハードルはとても高い。そこで本稿では、著者自身が MCMC について学習しながら、その内容を出来る限り易しくまとめた上で、実際のデータに対して適用することによって理解の妥当性を確認した。そのため「トヨタの株式投資収益率の TOPIX (東証株価指数) に対する感応度 β の推定」を行った。感応度 β を求めるには、一般的に、X 軸に TOPIX の日次収益率、Y 軸に個別銘柄の日次収益率をとってデータをプロットし、これに対して回帰分析を行って「係数 β 、切片 α 」を求める。本稿では、回帰分析から求めた β が、MCMC を用いて求めた β の結果と一致するかどうかを確認することとした。今回の実験の結果、第一に、回帰分析では $(\beta, \alpha) = (0.92506, 0.00027)$ 、MCMC による推定では $(\beta, \alpha) = (0.92480, 0.00027)$ となり、両推計の誤差は極めて小さいものとどまることがわかった。第二に、MCMC の推定に際しては、初期設定として「事前分布」を与えるが、それをどのように設定しても回帰分析による (β, α) の値に極めて近い値に収束することが明らかになった。つまり未知のパラメータの期待値・標準偏差を推定したい場合、MCMC を用いれば、それを十分な精度で予測可能であることが分かった。

キーワード：不動産投資、エッシャー変換、リスク、MCMC、事前・事後分布、尤度

目次

はじめに

第1部 不動産投資におけるリスクと価格決定

－リスク中立確率のもとでのエッシャー変換－ 2

はじめに 3

第1章 不動産投資と REIT 5

1-1 不動産投資

1-2 REIT

1-2-1 REIT の特徴

1-2-2 REIT の種類

1-2-3 REIT における価格決定

1-2-4 REIT におけるリスク

1-2-5 J-REIT の現状

第2章 不動産投資家価格モデルの決定 17

2-1 完備市場におけるモデル

2-2 不完備市場におけるモデル

2-2-1 エッシャー変換とは

2-2-2 価格決定モデル

第3章 REIT 投資におけるベンチマークの設定 26

3-1 REIT 指数におけるエッシャーパラメータの推定

3-2 先物価格のモンテカルロシミュレーション

3-3 適切なエッシャーパラメータの決定

結論と今後に向けて 31

参考文献、参考 WEB 32

第2部 マルコフ連鎖モンテカルロ法の理解と実践

-TOPIXに対する感応度 β の推定-	35
はじめに	36
第1章 回帰分析を用いた TOPIX に対する $\alpha \cdot \beta$ の推定	37
第2章 MCMC を用いた $\alpha \cdot \beta$ の推定	39
2-1 MCMC を実行するためのソフトウェアについて	
2-2 尤度・事前分布・事後分布とは何か ーベイズの定理を用いてー	
2-2-1 尤度・事前分布が必要となる理論的背景	
2-2-2 実際に必要となる作業	
2-3 WinBUGS を実行した結果	
2-3-1 マルコフ連鎖とは	
第3章 回帰分析・MCMC の推定結果の比較	49
3-1 MCMC を用いた $\alpha \cdot \beta$ の推定は回帰分析の結果と一致するのか	
3-2 MCMC の柔軟性の検証	
第4章 結論と残された課題	52
<参考文献・URL>	53

はじめに

近年の経済統計の分析においては、統計学自体が進歩していることに加え、物理学や生物学において用いられる手法の援用も増えるなど、手法の多様化と発展が顕著である。これらは当然ながら高度に専門的であり初学者が容易に利用できるものではないが、本稿ではこれらのうち二つの新しい手法を著者なりに理解するとともに、その理解の妥当性を確認するため実際の金融データに適用することを試みた。その結果、比較的納得のゆく分析結果が得られたので、用いた解析手法をややていねいに解説するとともに、適用結果を記述した。なお、第 1 部は木上貴史が執筆し、第 2 部は風岡宏樹が執筆した。

第 1 部

不動産投資におけるリスクと価格決定

—リスク中立確率のもとでのエッシャー変換を用いて—

木上貴史

はじめに

近年、日本経済も回復に向かい、日経平均株価も 2007 年 7 月現在 18,000 円台を推移している。特に回復が顕著であるのが、不動産である。「平成 19 年地価公示に基づく地価動向について¹⁾」によると、平成 18 年 1 月以降の 1 年間の地価動向は、地点数の多い三大都市圏及び地方ブロック中心都市の地価上昇が押し上げ、住宅地及び商業地ともに 16 年ぶりに上昇となった。特に東京都の地価は上昇率が高く、銀座などの地価の上昇は 1980 年後半のバブル期を超えるものとなっている。このような不動産バブルに連動して、不動産投資も熱気を帯びてきている。

不動産投資は代替投資²⁾の一つに挙げられ、その他には、未公開株や雷デリバティブズなどの天候デリバティブズ、そしてヘッジファンドなどである。特に近年では金融工学 (Financial engineering) の発達により、高度な金融商品が出てきており、さまざまなデリバティブズ商品が生まれている。デリバティブズとは、その商品自体が価値を持つということではなく、その原資産から価値が派生している商品のことである。例えば REIT³⁾であれば原資産は、REIT が所有しているビルや家屋などの不動産のことである。

上記のようなデリバティブズやオプションの価値はブラック・ショールズなどの価格決定モデルなどから価値を求めることができる。しかし、このような代替投資の対象となる原資産は株や債券などの流動性の高い資産と異なり、流動性が低く、価格付けがなされていたかったり、価値がよくわからなかったりするものが現状である。つまり不動産や未公開株に投資してもその投資が割高か割安かわからないのである。特に不動産投資

¹⁾ 平成 19 年 3 月 23 日、国土交通省 土地水資源局発表資料

²⁾ 現預金、株式、債券など伝統的なアセットクラスに代わって新しく導入された投資対象や投資手法のこと (野村アセットマネジメント HP より)

³⁾ Real Estate Investment Trust の略で、不動産投資信託と訳される。(John[1998]より)

においては、不動産鑑定士による評価に多数依存しており、これは不明瞭である。

そのため、本論では、住宅や土地などすべての家計にとって最も重要な資産である不動産投資の価格モデルの決定を行った。また投資家はリスク愛好型とリスク回避型がいるため、これを考慮し、危険回避度や危険の大きさをモデルに盛り込むためにエッシャー変換を用いた。具体的には、東証 REIT 指数から算出される J-REIT の収益率を用いてエッシャーパラメーター（危険回避度）を推定し、その上でエッシャーパラメータの値を変えた時の先物価格の変化をみることを試みた。

本論の構成は以下の通りである。まず、第 1 章では不動産投資と REIT について概観する。ここで、不動産投資熱のきっかけとなったと言っても過言ではない J-REIT について述べる。次に、第 2 章では不動産投資価格の決定モデルを完備市場と不完備市場に分けて構築する。このモデルには投資家のリスク回避度としてエッシャーパラメータを用いる。第 3 章にて第 2 章で構築したモデルを、J-REIT 指数から算出された収益率を用い、エッシャーパラメータの測定を行う。またエッシャーパラメータの変化によって先物価格がどのように変化するかをモンテカルロシミュレーションを行い、推定する。そして最後に結論と今後に向けての挑戦を述べる。

第 1 章 不動産投資と REIT

1. 1 不動産投資

不動産投資の現状をまず不動産投資が活発なアメリカから考察すると、大半は企業年金の運用に用いられている。企業年金に占める不動産運用割合は 2002 年度末で 4%弱である⁴。これは” Real Estate Equity⁵” の数字であり、REIT への投資を含めると 5%弱となる。一方で日本の信託銀行の不動産残高は 2004 年末で 1%弱と限りなく少ない。ちなみにここでいう不動産投資には不動産担保付きローンなどは含まない。

2000 年前半の日本の信託銀行などが不動産投資に懐疑的な理由は 2 つあげることができる。①バブル崩壊後、全く底が見えない不動産マーケットへ不信感があること、②ポートフォリオを組む際も資産クラスとしての不動産のリスク・リターン特性が釈然としなかったこと、などである。しかし、なぜ 2000 年前半から不動産投資熱が加速してきたのか。

ポートフォリオのリスクを抑制するためには、収益を得る機会ができるだけ異なる資産を組み合わせることが有効な手段である。代替投資商品の中での不動産投資のファンドの特性は、エクイティマーケットやボンドマーケットのリスクという伝統的な資産が内包しているリスクカテゴリーとは異質のリスクになっているということである。

また不動産の価格形成は、バブル期の土地神話に基づいた絶対的な右上がりの傾向が含まれている近似法を用いるのではなくて、将来のキャッシュフローから導きだされる収益に基づいた投資判断をしている。この背景には、日本においても証券化がブームに

⁴ 井出[2002]、森平[2003]

⁵ 不動産証券化ストラクチャーのエクイティ部分への投資のこと

なり、不動産の証券化にスポットが当たり始めたからである。これにより、不動産投資が、一般的な金融商品への投資と同じように解釈しやすくなったのである。

このような理由により、景気が回復するにつれ、不動産価格も上昇し、さらに投資行動も増加した結果、不動産投資が熱を帯びたのである。また日本版 REIT (J-REIT) が 2001 年 10 月から始まり、さらに不動産投資熱に拍車をかけた形になった。

1. 2 REIT⁶

REIT (Real Estate Investment Trust) とは、不動産投資信託の略である。REIT は 1960 年にアメリカ合衆国で生まれ、2001 年日本に導入された。信託を導管 (SPV または SPC と呼ばれる) として二重課税を回避する商品となっている。形式には信託型 (契約型) と会社型の二つがある。信託型 REIT とは信託の形態をとる REIT である。信託 = ビジネストラストと解釈され、信託宣言のもとに営利目的のために組織された団体のことである。2000 年 11 月、日本でも認められた。次に会社型 REIT とは株式会社の形態をとる REIT である。現在ではアメリカや日本でもほとんどがこの形である。

では、REIT はどのようにして取引されているのか。REIT は、株式会社の株式に相当する投資口を、市場において時価で購入することができる。また、このほか社債の発行を行ったり、銀行など金融機関から融資を受けることもある。これは株式会社の性質であると言える。このようにして証券市場を通じて投資家から集めた資金と銀行など金融機関から借り入れた資金を、オフィスビルを始めとする不動産などに投資し、売買益や賃借料などの収益を投資口を購入した投資家に分配する形態をとる。REIT の対象不動産に関する収益の確保、運営、管理、改修・模様替工事等の統括的なマネジメントを具

⁶ 井出[2002]、川口[2001]、John[1998]、Ralph[2002]を参照。

体的に行っているのが、ビルマネジメント事業、またはプロパティマネジメント (PM) 事業であり、REIT の将来的な価値を評価する上で重要である。

表 1 信託型と会社型の比較

	信託型（契約型）	会社型
形態	委託者（運用会社と）受託者（信販銀行）の信託契約に基づいて設置	資産運用を目的とする法人（会社）を設立
発行証券	受益証券	投資証券（株券）
投資家	受益者	投資家（株主）
投資家の 意思表示	なし	株主総会
各国の状況	・日本における投資信託 ・イギリスにおけるユニット・トラスト⁷	・アメリカにおけるミューチュアル・ファンド⁸ ・イギリスにおけるインベストメント・トラスト⁹

出典：（<http://www.fudosan-toshi.com/reit/>）より著者が作成

⁷ イギリスの投資信託の一つで、契約型のオープンエンド型投資信託のことである。オープンエンド型投資信託とは常に、自由に換金することが出来る投資信託のこと。換金は純資産価額にもとづいて行われる投資信託のことである。

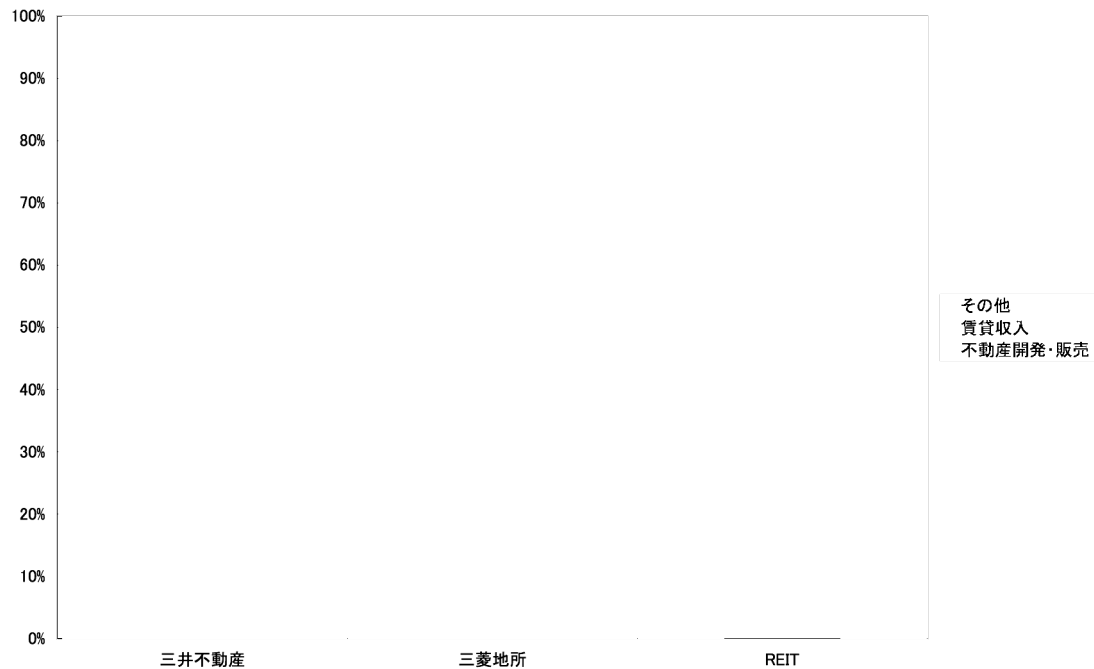
⁸ 米国の投資信託で、複数の投資家が資金を提供し共同で運用をするオープンエンド型のもの。

⁹ イギリスの投資信託の一つで、会社型のクローズドエンド型投資信託のことである。クローズドエンド型投資信託とは、発行者が発行証券を買い戻すことを保証していない投資信託のこと。投資家の側からみると純資産価額に基づいた価格での換金は保証されていない。したがって、多くの場合、発行証券は証券取引所などにおける市場価格に基づいて取引される。このため、必ずしも売買に用いる価格は純資産価額とは一致せず、実際よりも高く評価される場合もあれば、低く評価されることもある。

1.2.1 REIT の特徴

REIT の特徴として、①流動性の高さ、②配当金の存在、③法人税の控除、④利回りの安定性の4つがあげられる。まず①の流動性の高さについてである。従来の不動産であれば、多額の資金を要して所有する高額商品であり、流動性は悪かった。しかし REIT は流動性の高い金融商品の性格を不動産に取り入れたものであるため、流動性の高い不動産と見ることができる。次に②の配当金の存在についてである。REIT はエクイティや債券と同じように投資家に対して配当がある。しかも REIT の大きな特徴として利益の90%以上を配当しなければならないという義務がある。エクイティがキャピタルゲインを期待する商品であるのに対して、REITはインカムゲインを期待する商品である。③の法人税の控除であるが、②の配当金と密接に関連している。課税所得（キャピタルゲインは除く）の90%以上を投資家に配当するなどの基準をみたせば法人税の課税が免除される。これが投資効率の高い不動産投資を可能にしている。最後に④の利回りの安定性である。REIT の利回りは不動産の賃料収入（キャッシュフロー）が基本で、それにより配当金が支払われる。これにより安定的な収益を得ることができる。以下、図1は大手不動産会社と REIT の売上構成を比べたものである。REIT は不動産の開発や販売という高リスクのカテゴリをせず、賃貸や物件管理などの低リスクに集中している。また三井不動産の例であれば、ビジネススキルには魅力である。しかし開発リスクは取りたくないとなれば、三井不動産が保有するビル（霞ヶ関ビルなど）だけを切り離して、プールし、そのポートフォリオのマネジメントを三井不動産やグループ会社に委託する。これによりリスクは軽減されるのである。

図 1 大手不動産会社と REIT の売上構成



出典：2007 年度 3 月期決算データより著者が作成

ここでは景気と REIT の関係を述べる。J-REIT の場合、東京証券取引所に上場しており、少なからず景気の影響を受ける。REIT は不動産自体をベースにしているため、例えばインフレの時には、物価上昇とともに不動産の価格も連動して上がるので、インフレヘッジの効果がある。しかし少なからず景気の影響を受けるのにも関わらず、REIT の株価は変動しにくい。これはなぜだろうか。これは、REIT は家賃収入が大きな収入源であるため、毎月払う家賃が瞬間的に乱高下することがないからである。テナントがすべて急にいなくなるなどしない限りは収入が安定しているため、株価は変動しにくい。これが REIT の株価安定性の理由である。

1.2.2 REIT の種類

REIT の種類を投資対象別に分類してみる。すると 3 つに分類することができる。①エクイティ REIT、②モーゲージ REIT、③ハイブリッド REIT の 3 つである。まず①のエクイティ REIT であるが、不動産の所有権や持ち分に直接投資する REIT のことである。このエクイティ REIT が全体の 8 割を占めている。次に②のモーゲージ REIT¹⁰であるが、不動産担保ローンに投資する REIT のことである REIT の初動期（1960 年代）にはメジャーな存在であったが、今では全 REIT の 1 割程度を占めるにすぎない。そして最後に③のハイブリッド REIT である。これはエクイティとモーゲージ REIT を組み合わせた REIT のことで、①と②の両方の性質をもつ。しかしその性質の強弱は違いが見られる。まず、配当利回りであるが、エクイティ REIT<ハイブリッド REIT<モーゲージ REIT の順である。また成長性はエクイティ REIT>ハイブリッド REIT>モーゲージ REIT の順である。配当利回りではエクイティ REIT よりも高いが、モーゲージ REIT よりも低いとされる。一方成長性では、エクイティ REIT ほど高くはないが、モーゲージ REIT より高いとされている。

1.2.3 REIT における価格決定

証券投資信託はファンドが投資している株や債券の需要と供給で基準価格が決まる。しかし、不動産投資信託の基準価格はファンドに対する需要と供給で決まる。これが不動産投資信託と証券投資信託が大きく異なる点である。株式投資信託や公社債投資信託

¹⁰ 過去においては稼働物件への貸付と同様、開発・建設物件への貸付にも投資を行っていたが、近年では稼働物件のオーナーに対してのみ資金を貸し付けている。またモーゲージ REIT のポートフォリオは、一次モーゲージローン（一次抵当権の付されたモーゲージローン）かモーゲージプール、またはその両方で構成されている。ちなみにモーゲージプールとは GNNA(政府抵当金庫)、Ginnie Mae(ジニー・メイ)、FNMA(連邦抵当金庫)、Fannie Mae(ファニー・メイ)の集合体のことである。

のような証券投資信託では、ファンドが投資している株式や債券などの価格が上昇や下落によって、ファンドの基準価格の変動する。一方、不動産投資信託では、株式の発行済株式数に相当する発行済投資口数は一定で、株式と同じように、ファンドに対する投資家の需要と供給により基準価格は変動する。より多くの投資家がファンドを購入すれば、ファンドの基準価格は上昇し、一方で、より多くの投資家が売ろうとすれば、ファンドの基準価格は下落する。この受給は不動産市況、不動産賃貸市場の動向、金利や経済見通し、各ファンドの運用成績に対する期待など様々な要因の影響を受ける。また、保有するビルなどの価格が上昇して、不動産投資信託がそのビルを売却した際に売却益が発生した場合には、他の保有ビルの売却損益と合算されて、投資家に支払われる分配金に反映される。ただし、保有している不動産の価格の下落を嫌気して、投資家はその不動産投資信託の売却に動くことになれば、売りが増えることでファンドの基準価格は下落する。

1.2.4 REIT におけるリスク

また REIT の原資産である不動産の投資には大きく分けて 9 つのリスクがある。①賃料リスク（家賃収入が経済環境の変化などによって変動するリスク）、②借入リスク（不動産を取得、開発する場合に借りる融資金の割合によって生じるリスク）、③流動性リスク（不動産が売れない、また市場価格よりも低い価格でしか売却できないリスク）、④インフレーションリスク（インフレの影響で実質的な価値が目減りするリスク）、⑤マネジメントリスク（不動産に高い資産価値を維持させるためのマネジメントの優劣のリスク）、⑥金利リスク（金利の変動により生じるリスク）、⑦法制リスク（税制、建築基準、ゾーニングなどの不動産に関連した法規制が変わることにより生じるリスク）、

⑧環境リスク（不動産のある環境の変化により価値が変動するリスク）、⑨災害リスク（地震などの災害により生じるリスク）である。この9つの中でREITに大きく関係あるリスクは①、③、⑤、⑥である。この4つについてはREITを知る上で重要なので細かく述べていく。

① 賃料リスク

REITは毎月決まった家賃収入をもとに配当金を投資家に配当する。このときに借主が継続してその不動産を借りる保証はない。つまり企業の業績や家計所得の変化、人口の増減、近隣環境の変化、税制の変化などにより、空室の可能性がある。これにより、REITの株価が下落することがある。

③流動性リスク

不動産は金額の高い資産である。一つ購入することは民間であれば、人生を決めることと同じであると言われている。それゆえに高額なため、不動産そのものの売買がなかなか行われない。つまり不動産が売れない、また市場価格よりも低い価格でしか売却できないことがある。

⑤マネジメントリスク

テナントの空室率や賃料は、そのテナントへの維持管理状況、あるいは、テナントへのサービス水準によっても変動する。その結果、そのマネジメントの優劣によるマネジメントリスクが発生する。

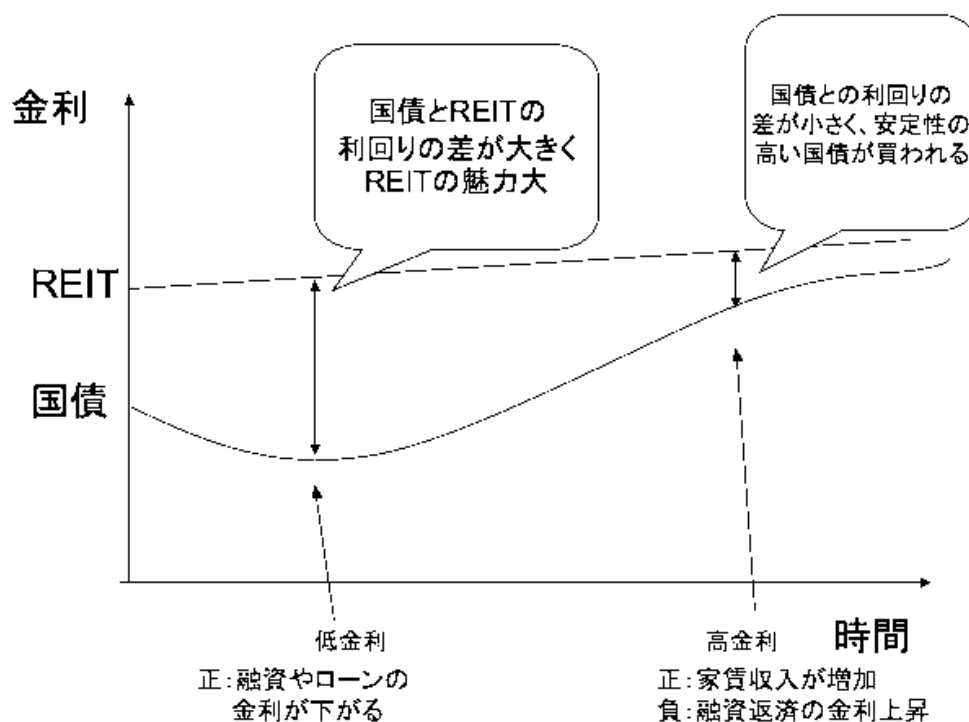
⑥REITと金利の影響

現在日本はゼロ金利政策が解除されたものの、他国に比べて超低金利である。今後金利が上がると予想される中で、REITに対してどんな影響が起こるのか。REITの価値は金利が高くなれば下がり、金利が低くなれば上がる。現在の低金利下では国債や

預金のリターンも低いため、REIT は魅力的であるが、逆に金利が上がると国債や定期預金の利率も上がるため、双方のリターンが接近して、REIT の魅力が少し薄れる。

しかし、景気がよくなることときは、賃料も上昇するので配当が上がるが、時間差が生じるという別の視点もある。

図 2 金利変化における REIT と国債の関係



出典：井出[2002]を参考に著者作成

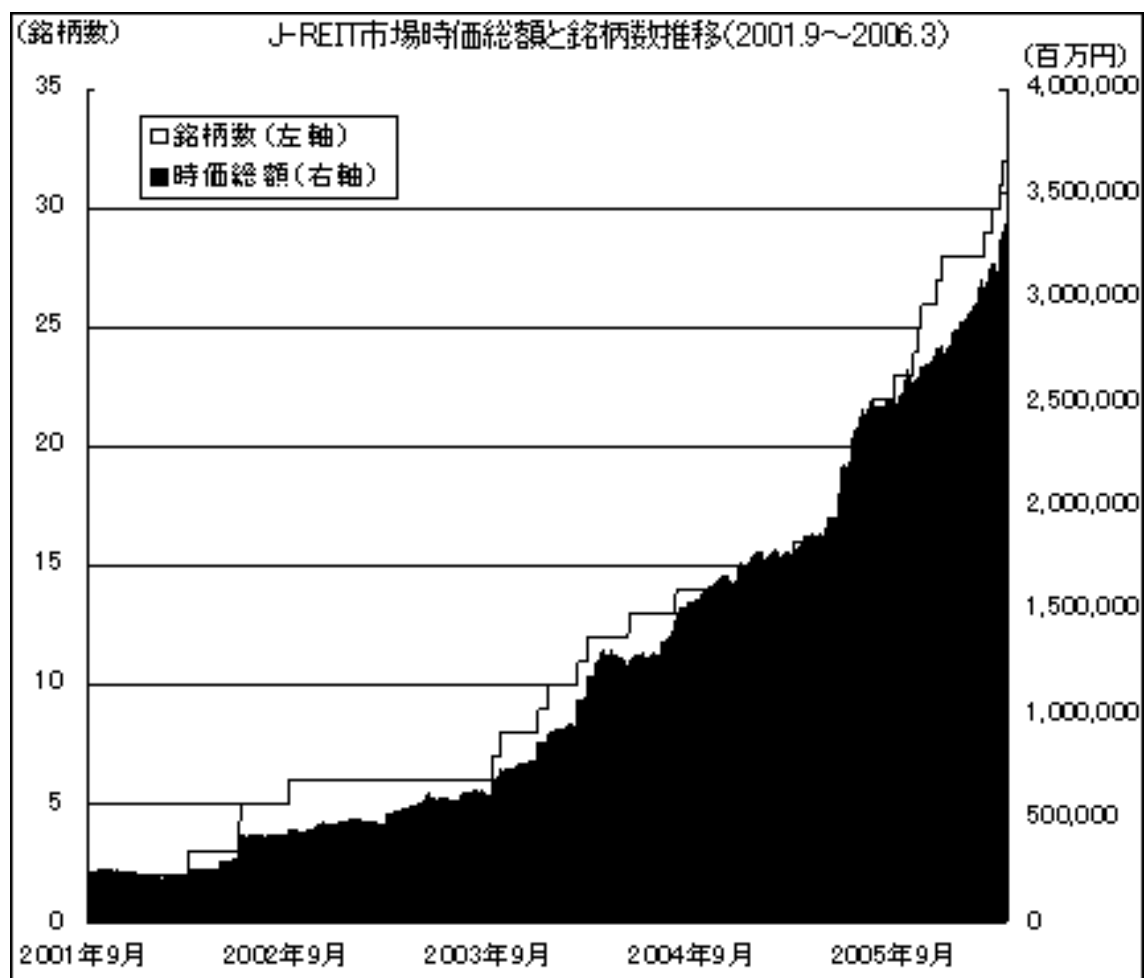
またこの他にも、大半の REIT はレバレッジ効果を狙うために投資資金の 4 割程度¹¹を融資でまかなっている。これにより金利が上がると、融資返済の負担が大きくなり、利回りが上がるという危険性もある。

¹¹ 井出[2002]、不動産証券化協会 HP より

1.2.5 J-REIT の現状

ここからは日本の REIT である J-REIT を見ていきたいと思う。J-REIT は 2001 年 9 月に、2 銘柄・時価総額 2,500 億円で誕生した。以降わずか 5 年の間に、時価総額は 4 兆円超に拡大した。これは大変な成長であると言える。

図 3 J-REIT 全銘柄の時価総額と銘柄数の推移

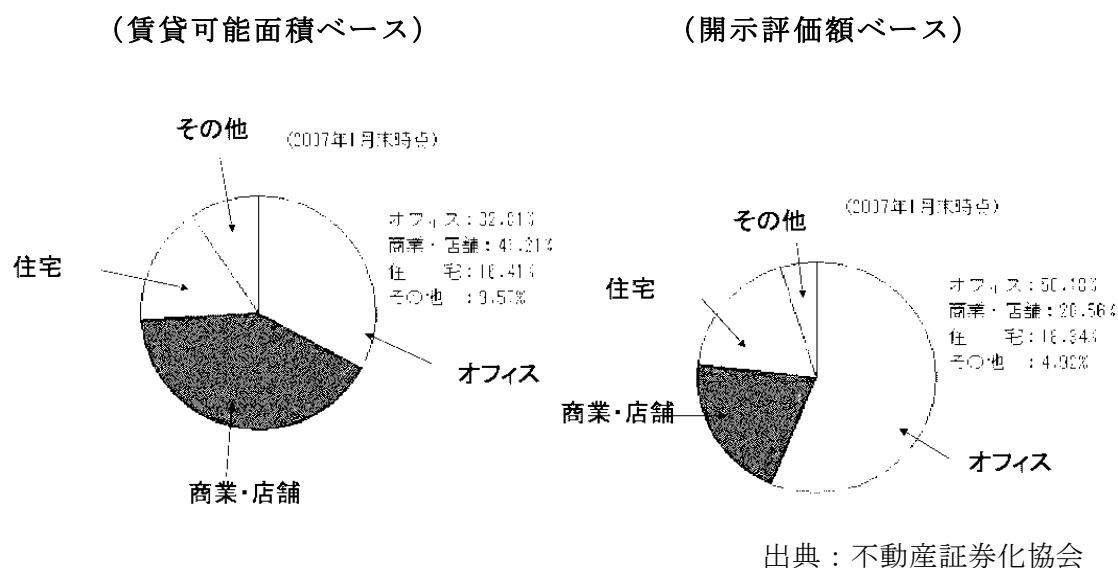


出典：JAPAN-REIT.COM より抜粋し作成

市場開設当初 2001 年～2002 年前半は、実績が少なく株式市場全体における市場規模も小さいため、認知が低かったことで価格は低迷していた。しかし、2002 年後半から、

分配実績の蓄積、税制の改正、機関投資家が運用に採用する MSCI 指数への組み入れ等の要因によって、次第に機関投資家へ浸透し始めた。さらに 2003 年には、J-REIT のファンド・オブ・ファンズ¹²の設定が可能となり、個人投資家へも裾野を広げた。2006 年度末には 40 銘柄、時価総額約 5 兆円、取得価格ベースで約 5.3 兆円の規模になり、2005 年度末から比べて、銘柄数は 28 銘柄増え、時価総額と取得価格ベースは 178%増、156%増と近年急速に拡大している。では次に簡単に、J-REIT の投資状況を考察する。

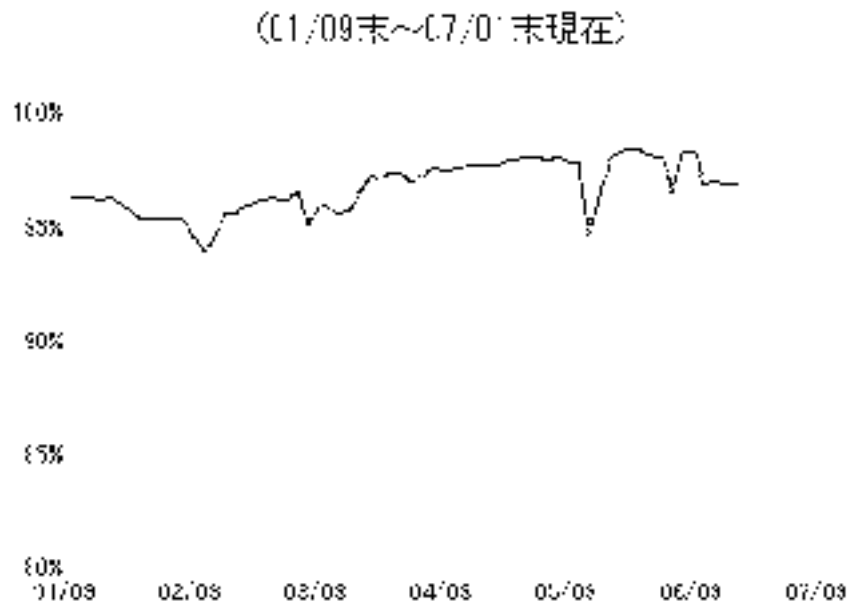
図 4 J-REIT 全体投資実績



この二つの図をみると面積ベースでは商業・店舗が大きくなっているのに比べ、開示評価額ベースではオフィスの方が大きくなっている。これは商業・店舗には大きなショッピングモールなどが含まれるため、評価額ベースであると、一等地などの大きなビルにオフィスが入っているため、割合が多くなっている。

¹² 運用機関が、複数の投資信託を適切に組み合わせて、一つの投資信託にまとめたもの。利点としては、もともとそれぞれの運用方針に基づき、分散投資されている投資信託を多数組み合わせることで、より広範囲な分散を実現して、リスクを抑えることができる点と、もともと付加価値のある投資信託を組み合わせることで、それぞれの付加価値を統合することができる点などがあげられる。(野村證券 HP より)

図 5 J-REIT 全体の稼働率の推移（賃貸可能面積ベース）



出典：不動産証券化協会

これをみると、95%以上の稼働率¹³を示しており、かなり高く稼働しているといえる。これを見ても J-REIT はかなり安定的に成長していると考えられる。このように不動産証券化市場は拡大を続けている。しかし、この J-REIT では完全にリスクをヘッジすることは不可能である。もともと原資産の取引がそこまで活発でないため、投資する際のベンチマークの存在が必要であると考えられる。しかもリスクのある世界であるため、投資家もっている強気（リスク愛好型）、弱気（リスク回避型）に関する相場観を考慮した価格決定を行うべきである。よって次章においては、このような価格決定理論をエッシャー変換を用いて行う。

¹³ 賃貸可能面積に対して賃貸されている面積の割合のこと。

第2章 不動産投資価格のモデルの決定

2. 1 完備市場におけるモデル

完備¹⁴市場とは、ある資産や商品から得られる将来のペイオフを、他の資産や商品によって合成できる市場のことである。例えば日本における日経平均や TOPIX、アメリカにおける NY ダウ工業平均を持っていたときに、日経平均先物やオプションを用いてリスクヘッジをすることは、上記の2つを組み合わせ、無リスク資産からのペイオフを合成していることになる。つまりコールの価格がわからなかったとしても、完備市場でのペイオフの合成が可能であることにより、現在の価格（コール価格）は、既存で価格のわかっている債券価格と株式から計算できる。しかし実際に世の中に完備市場は存在せず、これはファイナンス理論の仮定においてでてきた概念に過ぎない。

ここで不動産市場を考える。不動産の売買は頻繁に行われていないので、不動産を1単位（株に例えると1株）買うことは不可能である。つまり株であるならば単元株単位でしか購入できないことと同じように、不動産の場合もマンション1棟または1部屋単位でしか購入ができないのである。1部屋のリビング部分だけを購入などはできない。そもそも不動産の流動性が高い場合でも、不動産や土地を1単位買うことは不可能である。それは、投資家は不動産インデックスや上場されている投資信託、REITなどに投資するため、不動産そのものの現在価値がわからないという問題に起因している。現在、不動産の価値は不動産鑑定士が価格付けをしているため、投資家にとっては投資の原資

¹⁴ 派生証券の価格決定理論では、ある資産の派生証券を、その原資産と無リスク資産を用いた自己充足的な戦略で複製することから始まる。自己充足的な戦略で構成されたポートフォリオの満期時点の価値を派生商品の価値と同じにできるとき、その派生商品は複製可能（replicable）であるという。任意の派生商品が複製可能であるとき、市場は完備であるという。（森本(2000)より定義付け）

産である不動産価格は不明瞭なところが多いため、不動産デリバティブズの価格は不動産価格を用いて計算できず、またブラック・ショールズの公式も同様である。

2. 2 不完備市場におけるモデル

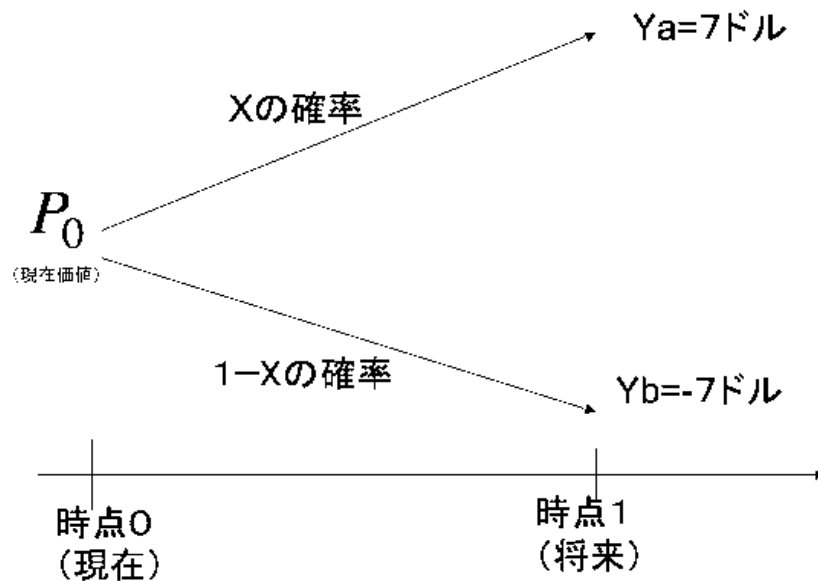
不完備市場とは、いくつかの資産で他の資産のペイオフを合成できない市場のことである。不完備市場においては、原資産の価格を、デリバティブズの価値と無リスク資産の価値から算出することができない。つまり、流動性が低いか、資産の売買が全く行われない市場においては、原資産の価格を上記の方法で算出することができない。ゆえに2.2節においては不完備市場における価格決定モデルについて述べていく。

2.2.1 エッシャー変換とは¹⁵

エッシャー変換とは、エッシャーパラメータ(h)と呼ばれる危険回避度(リスク回避度)や危険(リスク)の大きさを盛り込んで価格決定を行うことである。これを、測度変換(P測度からQ測度へ)を行うことで、加重分布による資産価格の決定としている。このような方法は不完備市場の典型的な例である保険市場(Insurance Market)でよく使われている。ここからは簡単な事例を用いてエッシャー変換の意味を直感的に説明する。

¹⁵ 数式展開(特にエッシャー原理)については①Buhlmann(1980)、②森本(2000)を参照。またエッシャー変換の説明については森平[2003]に多くをよった。

図 6 ゲームのモデル



出典：森平（2003）を参考に著者が作成

まずあるゲームをする。AさんはXの確率で勝つことができ、一回勝つごとに7ドル手に入れることができる(Y_a)。しかし $1-X$ の確率で負けて、一回負けるごとに7ドル払わなければならない(Y_b)。またシナリオを簡単に理解するために $X=0.5$ とする。ここで、このゲームの期待値は

$$E^P[x] = x \cdot Y_a + (1 - x) \cdot Y_b \quad (2.1)$$

となり、これを計算すると

$$E^P[x] = 0.5 \cdot 7 + 0.5 \cdot (-7) = 0 \quad (2.2)$$

となる。つまり期待値は0なのである。ここで期待値が0であるので、現在価値も

$$P_0 = \frac{E^P[x]}{(1 + r_f)} = 0 \quad (2.3)$$

となる。また r_f はリスクフリーレートを表す。ここでこのゲームに参加するかしないかを、参加を検討している人をリスクという視点で分けて、分析する。するとリスクとい

う視点では3つのタイプに分けることができる。①リスク愛好型、②リスク回避型、③リスク中立型の3つである。それではこの一つ一つについて検討していく。①のリスク愛好型は7ドルを手に入れることができるリスクがあるため、このゲームに参加しようとする。しかし、その一方で②のリスク回避型は7ドルを失うリスクがあるため、このゲームに参加しようとはしない。最後に③のリスク中立型は、リスクの平均に注目し、ゲームへの参加を決める。そのため、このゲームの期待値は0であるため、参加をしない。

この結果をみると、リスクの選好によって、このゲームの期待値が変化していると考えることができる。つまりリスクの大きさとリスク選好を加味した上で、現在価値を決定すべきだといえる。そこで Y_a に向かう際の重みとして W_a 、 Y_b に向かう際の重みとして W_b という値を仮定する。するとこの場合のゲームの期待値は

$$E^P[x] = (x \cdot W_a)Y_a + \{(1-x) \cdot W_b\}Y_b \quad (2.4)$$

となる。またここで $x \cdot W_a = q_a$ 、 $x \cdot W_b = q_b$ とすると、(2.4) 式は

$$E^P[x] = q_a Y_a + q_b Y_b \quad (2.5)$$

と変形される。また q_a と q_b はリスク中立確率と呼ばれており、このゲームにおいてリスク選好の重みである W_a と W_b の決め方をエッシャー変換と言う。

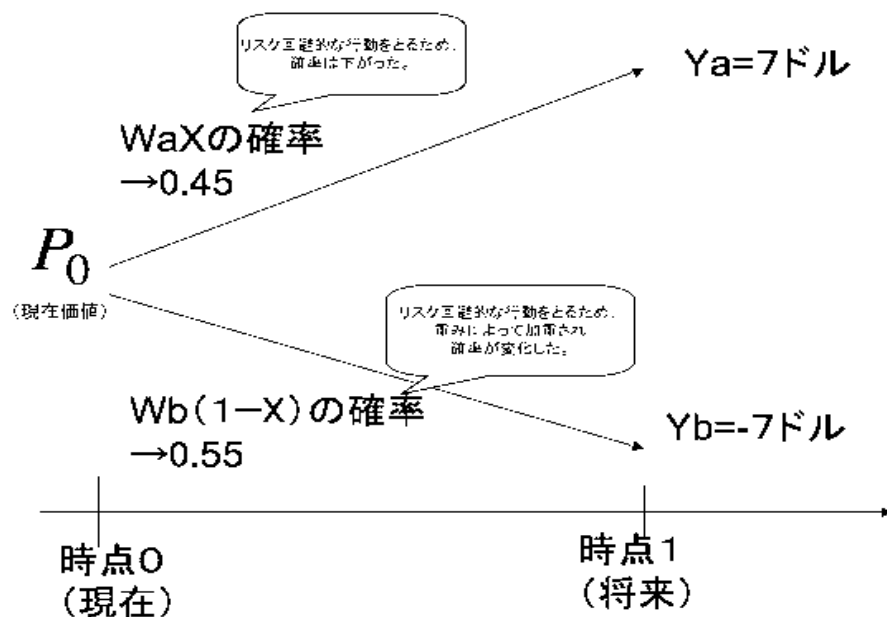
ここで、 W_a と W_b を求めてみると以下のようになる。

$$W_a = \frac{e^{hY_a}}{E^P[e^{hY}]} = \frac{e^{hY_a}}{P_a e^{hY_a} + P_b e^{hY_b}} \quad (2.6)$$

$$W_b = \frac{e^{hY_b}}{E^P[e^{hY}]} = \frac{e^{hY_b}}{P_a e^{hY_a} + P_b e^{hY_b}} \quad (2.7)$$

また e は自然対数の底を表す。ここで (2.6)、(2.7) からわかることは分子の値が必ず正の値であることである。これによりこれによりエッシャーパラメータが正の値であれば、 Y_a の方により向かうリスク愛好型になり、負の値であれば、 Y_b の方により向かうリスク回避型になる。

図 7 リスク選好を重みとして盛り込んだゲームのモデル



出典：著者が作成

図 7 はその例である。 $h=-0.01$ であるとき、 $X=0.5$ は、重み $W_a=0.9$ で加重されて $q_a=0.45$ となる。この結果より $q_b=0.55$ も導きだすことができる。これはリスク回避型を表しており、リスク回避型は W_a に向かう状況は低く見積もられ、 W_b に向かう状況は高く見積もられることを意味している。これによりリスクをエッシャー変換により盛り込むと、リスクの取り方により現在価値が変わることが理解できた。また $h=0$ のとき、 $W_a=W_b=1$ となり、 $x=q_a$ 、 $1-x=q_b$ となる。この状況はリスク中立型と言える。以上が 3 つのリスク選好により理解できるエッシャー変換である。

では、ここからエッシャー原理について理論的に述べ、そのあとにエッシャー変換について述べる。まず n 個の主体を考え、確率空間 (Ω, F, P) の中で発生した事象（保険事故） $\omega \in \Omega$ によって主体 i が被る損失額を $X_i(\omega)$ とする。さらに、この主体の間では保険契約を互いに結ぶことができ、それにより、事象 ω の発生で主体 i が得ることの出来る保険金を $Y_i(\omega)$ とする¹⁶。このとき保険料はある確率変数 φ によって

$$P(Y_i) = \int_{\omega \in \Omega} Y_i(\omega) \varphi(\omega) dP(\omega) = E[Y_i \varphi] \quad (2.8)$$

で表されとする。ここで任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\sum_{i=1}^n Y_i(\omega) = 0$ が成立しているとき、 Y をリスク交換（risk exchange）と呼んでいる。リスク交換が成立しているとき、全主体のトータルのリスク量は変化しない（保険リスクについては変化はない）。これより以下、リスク交換が常に成立していると仮定する。

以上の条件設定のもと、主体 i の効用を u_i とおいて、その期待値が保険リスクについて最大化される。つまり

$$\int_{\omega \in \Omega} u_i \left[-X_i(\omega) + Y_i(\omega) - \int_{\omega' \in \Omega} Y_i(\omega') \varphi(\omega') dP(\omega') \right] dP(\omega) \quad (2.9)$$

を最大化する (φ, Y) の組を均衡と定義する。ここで u_i として上記の指数効用関数を選

択し、 $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ と置き、計算することにより

$$\varphi(\omega) = \frac{e^{\delta Z(\omega)}}{E[e^{\delta Z}]} \quad (2.10)$$

となることがわかる。よって、あるリスクについて、その保険料は

$$\frac{E[X e^{\delta Z}]}{E[e^{\delta Z}]} \quad (2.11)$$

¹⁶ 主体 i は、保険の出し手となることもできる。その場合 $Y_i(\omega)$ は負の値となる。

で与えられる。ここで X と $(Z-X)$ が独立であると仮定すれば、(2.4)式は

$$\frac{E[Xe^{\delta Z}]}{E[e^{\delta Z}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}e^{\delta(Z-X)}]}{E[e^{\delta X}e^{\delta(Z-X)}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}]E[e^{\delta(Z-X)}]}{E[e^{\delta X}]E[e^{\delta(Z-X)}]} = \frac{E[Xe^{\delta X}]}{E[e^{\delta X}]} \quad (2.12)$$

となり、ここにエッシャー原理が導出される。

このエッシャー原理を用いて、エッシャー変換 (Esscher transform) について述べる。エッシャー変換は、確率測度 P を、以下のようにして測度 Q に変換することである。

$$dQ(x) = \frac{e^{hx}}{E[e^{hx}]} dP(x) \quad (2.13)$$

この変換で求められた測度 Q のもとで、保険金額の期待値を計算して、保険料とする保険数理 (アクチュアリー) の方法がエッシャー原理である。またこの変換方法がエッシャー変換である。これは、リスク中立確率を求めて、そのもとでの期待値を価格とするデリバティブズの価格計算手法と同様である。よって 2.2.2 においてエッシャー変換を用いた価格決定のモデルを述べる。

2.2.2 価格決定モデル¹⁷

一般的に、エッシャー変換を用いた資産の価格決定は 2.2.1、この資産からの t 年後のキャッシュフローが $g(x)$ ¹⁸ とすると

$$P_0 = \frac{E_0^Q[g(\tilde{x})]}{e^{r_f t}} = \frac{1}{e^{r_f t}} E_0^P \left[g(\tilde{x}) \left(\frac{e^{h\tilde{x}}}{E_0^P[e^{h\tilde{x}}]} \right) \right] \quad (2.14)$$

となる。また P_0 はこの資産の現在価値、 r_f は無リスク金利、 E_0^Q は時点 0 における Q 測度のもとでの期待値、 E_0^P は時点 0 における P 測度のもとでの期待値、 h はエッシャーパ

¹⁷ 森平 (2003a)、森平 (2003b) に多くをよった

¹⁸ $g(x)$ は現物の場合は x そのものであり、コールオプションの場合は、権利行使価格を K とすれば、 $\text{Max}[x - K, 0]$ で与えられ、プットオプションの場合は、 $\text{Max}[K - x, 0]$ で与えられる。

ラメータである。

ここで、T 期間後のこの資産からのキャッシュフローが、現在の資産価格にある確率変数 X_T に指数変換したものであったならば

$$g(\tilde{X}) = \tilde{P}_T = P_0 e^{\tilde{X}_T} \quad (2.15)$$

となり、(2.14)式は

$$P_0 = \frac{E_0^p[P_T \cdot E e^{h\tilde{X}_T}]}{e^{r_f T} E_0^p[e^{h\tilde{X}_T}]} = \frac{E_0^p[P_0 e^{\tilde{X}_T} E e^{h\tilde{X}_T}]}{e^{r_f T} E_0^p[e^{h\tilde{X}_T}]} \quad (2.16)$$

となる。ここで両辺を P_0 で割って整理し、確率変数 X の積率母関数¹⁹ (mgf: Moment Generating Function) を用いると

$$e^{r_f T} = \frac{M_X^P(1+h^*, T)}{M_X^P(h^*, T)} \quad (2.17)$$

となる。また $M_X^P(h^*, T)$ はエッシャーパラメータ h を用いた時の確率変数 x の積率母関数である。(2.17) 式を無リスク金利について解くと

$$r_f = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{M_X^P(1+h^*, T)}{M_X^P(h^*, T)} \right)^{20} \quad (2.18)$$

となる。

この (2.18) 式からは無リスク金利は、期間とエッシャーパラメータ (h) と積率母関

¹⁹ $\phi(\theta) = E[e^{c\theta}] = g(\theta)$ で定義される関数。分布の特徴をいくつかの量で表すために、モーメント (積率) が用いられる。たとえば、1 次の積率は分布の中心がどこにあるかを示し、2 次のそれは分布の中心付近において分布がどれほど集中しているかを示している。モーメントは理論的にその期待値を与える式より求められるが、一般には必ずしも容易ではない。そのため、モーメントを生成する関数として、積率母関数 moment generating function と呼ばれる上式を定義した。

²⁰ $\ln(\cdot)$ は底を e とする自然対数を表す

数から計算できることがわかる。つまりエッシャーパラメータ (h) は、無リスク金利と期間と積率母関数から計算できるのである。そして確率母関数はほとんどの確率分布に対して計算されており、新たに計算をする必要がない。また、(2.18) 式がマルチンゲール²¹に従っていると、エッシャーパラメータ (h) は、無リスク金利と将来資産価格のボラティリティのみで表現できる。

ここで確率変数 X_T が平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布をしていると仮定する。ここで (2.18) 式は正規分布の積率母関数を用いて、

$$r_f \cdot T = \frac{\sigma^2 T}{2} + (\mu + \sigma^2 h^*) T \quad (2.19)$$

と表すことができ、これを変形すると

$$\mu + \sigma^2 h^* = r_f - \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.20)$$

となる。(2.20) 式の左辺は、資産価格の確率変数、つまり TOPIX や NY ダウ工業平均指数、不動産価格指数などを表す μ とエッシャーパラメータ (h) は一般的には分からない値であるが、その合計は右辺である無リスク金利からボラティリティを引いたものである。この右辺はデータから推定でき、資産価格が (2.16) 式で表すことができるならばインデックスを表す μ とエッシャーパラメータ (h) を推定することができる。

このことが意味することは、原資産のリスクはブラック・ショールズの公式におけるように価格が対数正規分布に従うと仮定することが難しいことが多いため、さまざまな分布に従うことのできるエッシャー変換は優位であることである。

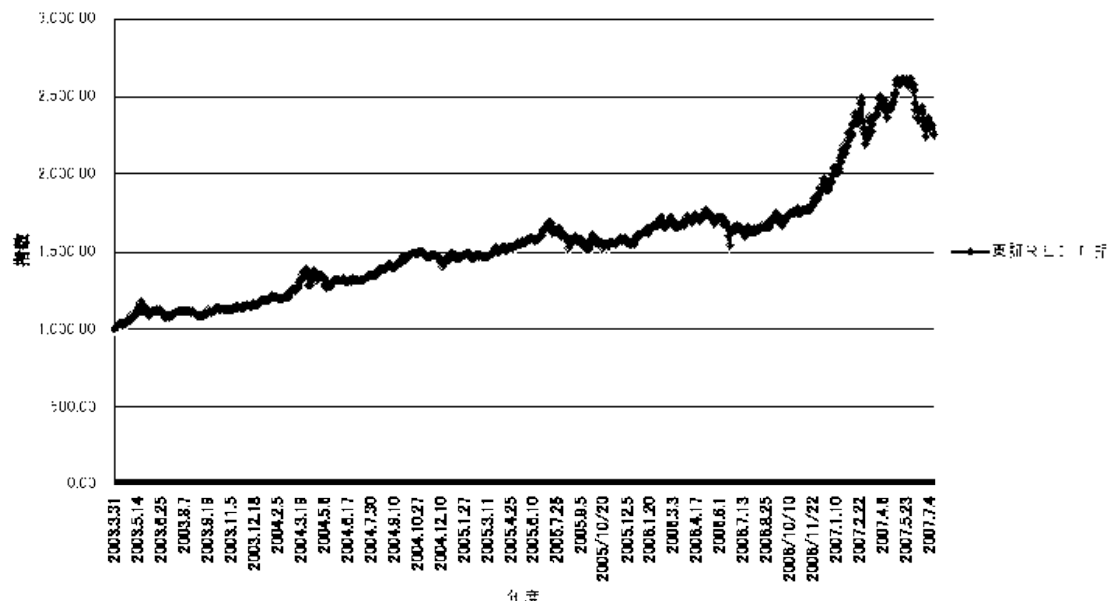
²¹ 価格がマルチンゲールに従うということは、当該資産価格を無リスク資産価格（国債などの債券）で割ったときの値、「相対資産価格」がトレンドを持たないことを意味している。トレンドをもたなければ、現在価格と将来価格との差の平均が 0 であることである。これは市場が弱度の意味で効率的である。（森平 (2003)、木島 (1998) より引用）

第3章 REIT 投資におけるベンチマークの設定

3.1 REIT 指数におけるエッシャーパラメータの推定

REIT 指数でもっとも有名であるのは東証 REIT 指数である。東証 REIT 指数²²とは、東京証券取引所に上場している不動産投資信託（J-REIT）全銘柄を対象とした時価総額加重平均の指数である。

図8 東証 REIT 指数の推移



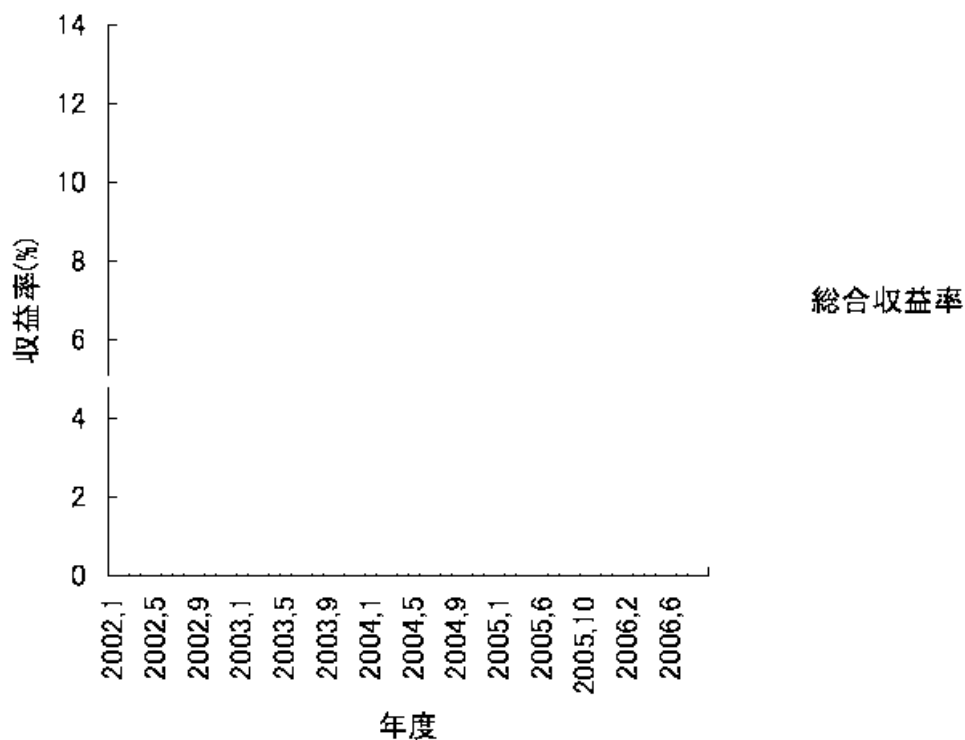
出典：Bloomberg より得たデータをもとに著者作成

この結果をみると J-REIT は順調に成長していると思われる。ここからはこの東証 REIT 指数より導きだされた J-REIT の期待収益率を用いて、エッシャーパラメータの推定を行う。今回用いる指標は ARES（社団法人不動産証券化協会）発表の J-REIT 不動産

²² 東京証券取引所に上場している不動産投資信託（J-REIT）全銘柄を対象とした時価総額加重平均の指数のこと。東京証券取引所が毎日算出、公表している。また、この指数は、証券投資信託のベンチマークとしても利用されている。例えば、第一勧業アセットマネジメントの運用する「DKA J-REIT インデックスファンド」や富士投信投資顧問の運用する「J-REIT アクティブオープン」のような J-REIT に投資するファンド・オブ・ファンズなどが、この指数をベンチマークとしている。

投資インデックスである。この総合収益率はインカムゲイン収益率とキャピタルゲイン収益率の合計であり、REIT のタイプ別に算出されているものの加重平均をとったものである。

図 9 J-REIT の総合収益率



出典：日本不動産証券化協会よりデータ取得し、著者が作成

図 9 は 2002 年 1 月から 2006 年 9 月までの J-REIT の総合収益率である。これを用いて、インプライドに危険回避度を推定する。エッシャーパラメータは投資家の効用関数が負の指数型効用関数であると想定したときの危険回避度を表す。また、この場合の危険回避度は絶対危険回避度一定という性格をもっている。

ここで、現物不動産価格が Q 測度におけるマルチンゲールに従っていると仮定する。するとエッシャーパラメータの推定式は

$$-h^* = \left(\frac{\mu - r_f}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

となる。(3.1) 式は投資パフォーマンスとしてあるシャープ・レシオ²³に近似している。

この (3.1) 式を用いてエッシャーパラメータを推定した結果は以下の通りである。

平均	標準偏差	変動係数	h (エッシャーパラメータ)
7.236218927	3.426978069	0.473586842	0.978213

(注) 無リスク金利は、2006 年 9 月初日の新発 10 年国債利回り²⁴を使用した。

3. 2 先物価格のモンテカルロシミュレーション²⁵

エッシャー変換を用いて、先物の価格変化を推定した。3.1 において推定した平均と標準偏差を用いて、東証 REIT 指数において今から 1 年後に価格 100 で購入する、または売却する契約を結んだとする。この先物価格は、リスク中立確率を用いた期待値として計算すると

$$F_0(T) = E^Q[\tilde{S}_T] = S_0 e^{(\mu + \sigma^2 h) + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (3.2)$$

このときリスク回避度 (エッシャーパラメータ) の値を変化させたときの先物の価格が変化するかを、エッシャーパラメータの値を-1 から 1 まで乱数を発生させる²⁶ことによるモンテカルロシミュレーションを 10000 回することで推定した。その結果は以下の通りである。

²³ 単純なリターンではなく、そのリターンを得るためにどれくらいのリスクを取っているかを計測する指数。一般に、1 資産の相対的なパフォーマンスを表すのではなく、多くの資産の組み合わせであるポートフォリオ全体のリスク調整後のリターンを意味し、高いほうがよいとされている。(野村證券 HP より)

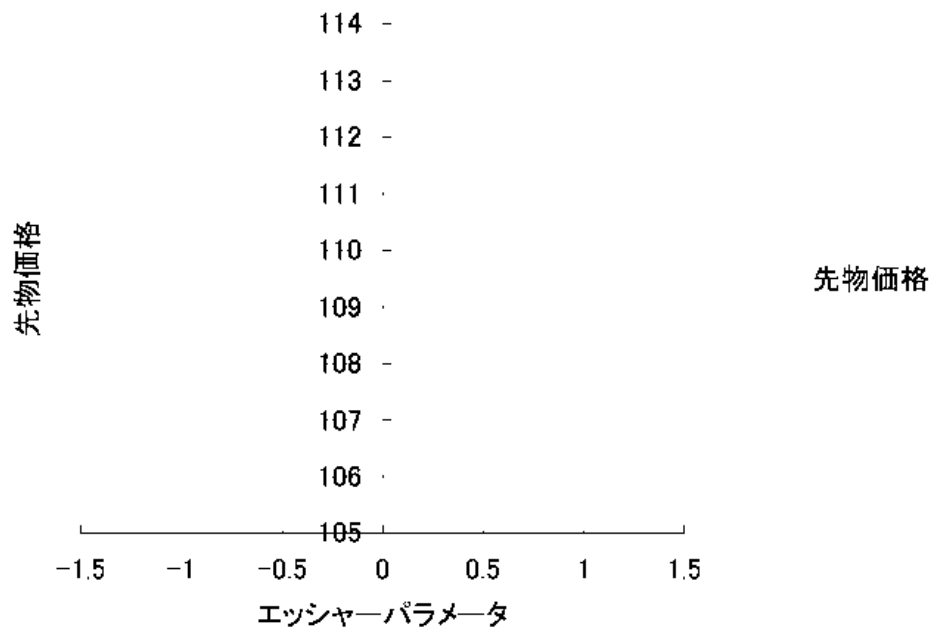
²⁴ ニッセイアセットマネジメントより。

(<http://www.nam.co.jp/market/souba/0609/ks.html>)

²⁵ モンテカルロシミュレーションについては牧本[2006]を参照。

²⁶ 乱数の分布は一様分布を用いた。

図 1 0 エッシャーパラメータと先物価格の変化



出典：著者作成

この結果より、投資家のリスク回避度がリスク回避型 ($h < 0$) から、リスク中立型 ($h = 0$)、リスク愛好型 ($h > 0$) になるにつれ、先物価格が高くなることがわかる。つまり投資家が不動産市場の将来に楽観的になればなるほど、先物価格は高くなる。これによりリスク選好により価格が変化していくことがわかった。

3. 3 適切なエッシャーパラメータの決定²⁷

ここまでは投資家の危険回避度を示すエッシャーパラメータ (h) を推定し、付与することで、不動産先物価格指数を対象にする先物やオプションの価格を推定してきた。これは投資家のリスク回避度を盛り込んだ価格決定であり、リスク選好を加味しているため、既存のオプションプライシング理論よりも優れてはいるが、その一方で投資家の

²⁷ 森平 (2003)

もつリスク選好により価格算出が左右されやすいというデメリットも存在する。

このような問題があるため、適切なエッシャーパラメータの決定に効果のある方法が2点ある。

まず一点目であるが、3.1で行ったように現物不動産価格がQ測度におけるマルチンゲールに従っていると仮定し、エッシャーパラメータを推定する。これは不動産価格指数の取引に市場性があると言い換えることができるので、これを仮定すれば投資家は現物とそのデリバティブズによってリスクを回避できる可能性がある。

次に二点目であるが、市場性のある投資可能な資産の価格を利用する。例えば、不動産インデックスへの投資を考える場合、特定の不動産会社や不動産株価指数、あるいはより平均的にTOPIXへの投資を考え、エッシャー変換を用いた現物価格式を用いて、エッシャーパラメータを市場価格から逆算する。

この2つのどちらの場合でも、このようにして計算されるエッシャーパラメータの値をベンチマークにして用いるべきである。

結論と今後に向けて

近年盛り上がりをみせる不動産投資であるが、投資の原資産である不動産自体は、株や債券などの流動性の高い資産と異なり、流動性が低く、価値があいまいである。ゆえに自分自身の不動産投資が割高か割安かを判断するベンチマークとしてエッシャー変換を用いた価格決定理論を示した。

エッシャー変換を用いた資産の価格は

$$P_0 = \frac{E_0^p[P_T \cdot Ee^{h\tilde{X}_T}]}{e^{r_f T} E_0^p[e^{h\tilde{X}_T}]} = \frac{E_0^p[P_0 e^{\tilde{X}_T} Ee^{h\tilde{X}_T}]}{e^{r_f T} E_0^p[e^{h\tilde{X}_T}]}$$

で表すことができ、エッシャーパラメータは

$$\mu + \sigma^2 h^* = r_f - \frac{\sigma^2}{2}$$

で推定することができる。エッシャー変換を用いるメリットとしては①価格がどのような分布にも対応できるモデルである、②投資家のリスク選好によりベンチマーク作りになる、③市場価格がわかる場合は、逆算して求めることができる、の3点をあげることができる。このように不動産投資などの代替投資においては、無リスクヘッジが不可能であることからリスクを考慮せざるを得ない。しかし別の視点からみるとリスクの大きさや選好をもとにアクティブな投資が可能になるとも考えられる。ゆえに不完備市場における価格決定理論としてエッシャー変換は大変望ましいものであると思う。

また今後に向けての課題であるが、エッシャー変換を用いた価格決定理論を M&A のリスク分析に拡張したいと考えている。M&A は常にリスクがあり、これにより企業のバリュエーション方法も変化してくると考えられる。ゆえに過去の M&A データを用い、エッシャーパラメータの変化に応じた企業価値を推定したいと考えている。よって本稿は、そのための一歩となったと思う。

参考文献

- [1]井出保夫[2002]、「入門の金融 REIT のしくみ」、日本実業出版社
- [2]川口有一郎[監修]、ダイヤモンド社[編], [2001]、「[図解]わかる！不動産投資信託」、
ダイヤモンド社
- [3]木島正明[1998]、「金融リスクの計量化-クレジットリスク-」、『金融財政事情研究会』
- [4]木島正明、田中敬一[2007]、『資産の価格付けと測度変換』、朝倉書店
- [5]小暮厚之[2005]、「多変量保険リスク管理への共単調性アプローチ」、保険とリスク
特集：研究成果の中間報告 慶應義塾湘南藤沢学会、慶應義塾大学 21 世紀 COE
- [6]小暮厚之、高山晃和[2005]、「危険回避度のノンパラメトリック推定-我が国株式
市場への応用-」、保険とリスク 特集：研究成果の中間報告 慶應義塾湘南藤沢学
会、慶應義塾大学 21 世紀 COE
- [7]小林秀二[2006]、「不動産ファイナンス入門 リスクマネジメントのための不動産金
融工学」、ビーエムジェー
- [8]牧本直樹[2006]、「ビジネスへの確率モデルアプローチ」、朝倉書店
- [9]森平爽一郎[監修]、三菱信託銀行年金運用研究会[編], [2003]、「 α の追求-資産運用
の新戦略」、『金融財政事情研究会』、
- [10]森平爽一郎[2005]、『イベントリスクに対するデリバティブズ契約』、保険とリス
ク 特集：研究成果の中間報告 慶應義塾湘南藤沢学会、慶應義塾大学 21 世紀 COE
- [11]森平爽一郎[2003]、『不動産価格指数デリバティブズの評価モデル-ヘドニック価
格指数と Esscher 変換にもとづく-』、慶應義塾湘南藤沢学会、慶應義塾大学 21 世紀
COE

- [12]森本祐司[2000]、『金融と保険の融合について』、日本銀行金融研究所
- [13]Buhlmann, Hans. [1980] "An Economic Premium Principle," *ASTIN Bullentin*-11, 52-60
- [14]Gerber, H. U. and Shiu, Elias S. W. [1994] "Option Pricing by Esscher Transforms," *Transactions of the society of Actuaries* , 99-140
- [15]John A. Mullaney[著]、(財)民間都市開発推進機構 REIT 研究会[訳], [1998] 「REIT-不動産投資信託の実務-」、金融財政事情研究会
- [16]Ralph L. Block[著]、松原幸生／河邑環[訳], [2002]、「投資家のための[入門]不動産投資信託」、プログレス
- [17]Wang, Shaun S. [2000] "A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks," *Journal of Risk and Insurance*, 15-36
- [18]Wang, Shaun S. [2002] "A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks," *ASTIN Bullentin*32, 213-234
- [19]Wang, Shaun S. [2003] "Equilibrium Pricing Transforms-New Results Using Buhlman's 1980 Economic Model-, " *ASTIN Bullentin*33, 57-73

参考資料

- [1]平成19年3月23日、国土交通省 土地水資源局発表資料

参考 URL

- [1]ニッセイアセットマネジメント
<http://www.nam.co.jp/market/souba/0609/ks.html>
- [2]野村證券
<http://www.nomura.co.jp/terms/japan/hu/fof.html>
- [3]野村アセットマネジメント
http://www.nomura-am.co.jp/basicknowledge/word/term.php?mode=details&term_id=46&kana_id=00-05&

en_id=10-01

[4]不動産証券化協会

<http://www.ares.or.jp/>

[5]不動産投資.com

<http://www.fudosan-toshi.com/reit/>

[6]三井不動産

<http://www.mitsuifudosan.co.jp/corporate/ir/finance/>

[7]三菱地所

<http://www.mec.co.jp/j/group/investor/index.htm>

[8]Bloomberg.co.jp

<http://www.bloomberg.com/apps/quote?T=jpquote.wm&ticker=BBREIT:IND>

[9]JAPAN-REIT.COM

<http://www.japan-reit.com/>

第 2 部

マルコフ連鎖モンテカルロ法の理解と実践 ー TOPIX に対する感応度 β の推定 ー

風岡宏樹

はじめに

近年、「マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC : Markov Chain Monte Carlo)」という手法を用いた研究が、米国の学会等で盛んに行われている。この MCMC を利用すると、未知のパラメータ θ の平均値・標準偏差を求めることが出来る。これにはまず、「マルコフ連鎖」(現時点の値が、一期前の値からのみ影響を受け、それより前の値からは独立であるという確率過程)の性質を利用し、 θ の初期分布 $p(\theta_0)$ と推移核 $p(\theta_n|\theta_{n-1})$ の 2 つを仮定した上で、このマルコフ連鎖を利用した無数の乱数列を発生させる。この無数の乱数列から θ の新たな確率分布が求まり、 θ の確率分布から未知のパラメータ θ の平均値・標準偏差が求まる、という流れである。

このような MCMC について、日本でもようやく知名度が高まってきた。しかし、「回帰分析」「ニューラルネットワーク」のような手法とは異なり、いまだ大学生でも読みこなせる入門書や、実際に動かすことができるプログラム例などがほとんどないため、初学者にとってハードルがとて高くなっている。そこで本稿では、筆者自身が MCMC について学習しながら、その内容を出来る限り易しくまとめた上で、実際のデータに対して適用する。

以下、第 1 章「回帰分析を用いた TOPIX に対する $\alpha \cdot \beta$ の推定」では、ファイナンスの用語である「 α 」「 β 」の説明と、これの一般的な推定方法について記述する。第 2 章「MCMC を用いた $\alpha \cdot \beta$ の推定」では、MCMC を実行するために必要なソフトである「WinBUGS」に書いたプログラムを元に、これを動かすために必要な、MCMC に関する重要な概念を整理する。第 3 章「回帰分析・MCMC の推定結果の比較」では、回帰分析によって求めた $\alpha \cdot \beta$ の値と、MCMC を利用して求めた $\alpha \cdot \beta$ の値が一致(もしくは近似)するかどうかを検討する。それと同時に、MCMC を実行する際に

¹ 確かに、和合 (2005) のように、MCMC に関する日本語の文献は若干存在する。しかしこれらは MCMC の「理論面」に偏っていたり、実用例が書かれていても、それに使用されたプログラム例とその解説が書かれていない。

必要となる初期設定を変えると、異なる結果になってしまうかどうかについての実験を行う。第4章では結論と残された課題を述べる。

第1章 回帰分析を用いた TOPIX に対する $\alpha \cdot \beta$ の推定

個別企業の TOPIX（東証株価指数）に対する「 α 」「 β 」の値は、一般的に、Y 軸に個別銘柄の日次株式投資収益率、X 軸に TOPIX の日次株式投資収益率をとってデータをプロットし、これに対して回帰分析を行い、「係数を β 、切片を α 」として求める。つまり、下図のように示すことが出来る。

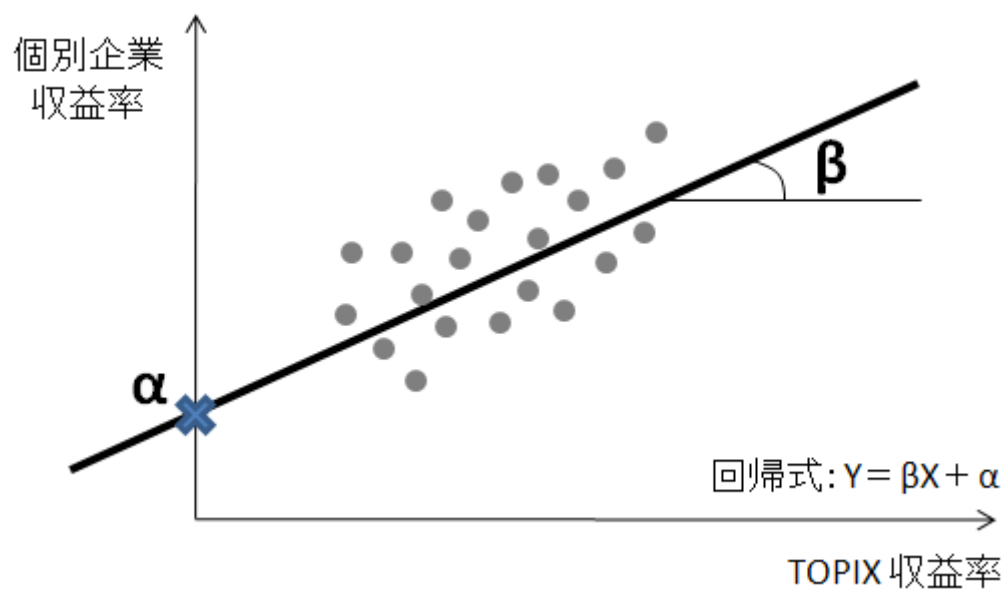


図1：個別企業の TOPIX に対する $\beta \cdot \alpha$ の回帰分析による求め方

つまり「 β 」とは、市場動向にどれだけ敏感に反応するかを意味している。簡単に言うと、「TOPIX が 1% 上昇した場合、個別企業が何% 上昇するか」ということである。また「 α 」とは、市場動向に対する感応度とは別にした、各企業の株式投資収益率を意味する。

本稿を書く動機の一つとして、MCMC の実践例（及び、それを解くためのソフトウェア「WinBUGS」のプログラム）が皆無と言っていいほど公開されておらず、学習しにくいことがあげられる。

そこで本稿では、「初学者の」私なりの MCMC の実践例を 1 つ提示したい。

MCMC の実践： 通常は回帰分析から求める $\beta \cdot \alpha$ を、MCMC を用いて求める。

まず、回帰分析による $\beta \cdot \alpha$ の推定を行う。

- データ : トヨタ・TOPIX の日次株式投資収益率
- 期間 : 3 年分
- データ取得方法 : AMSUS (Quick 社)

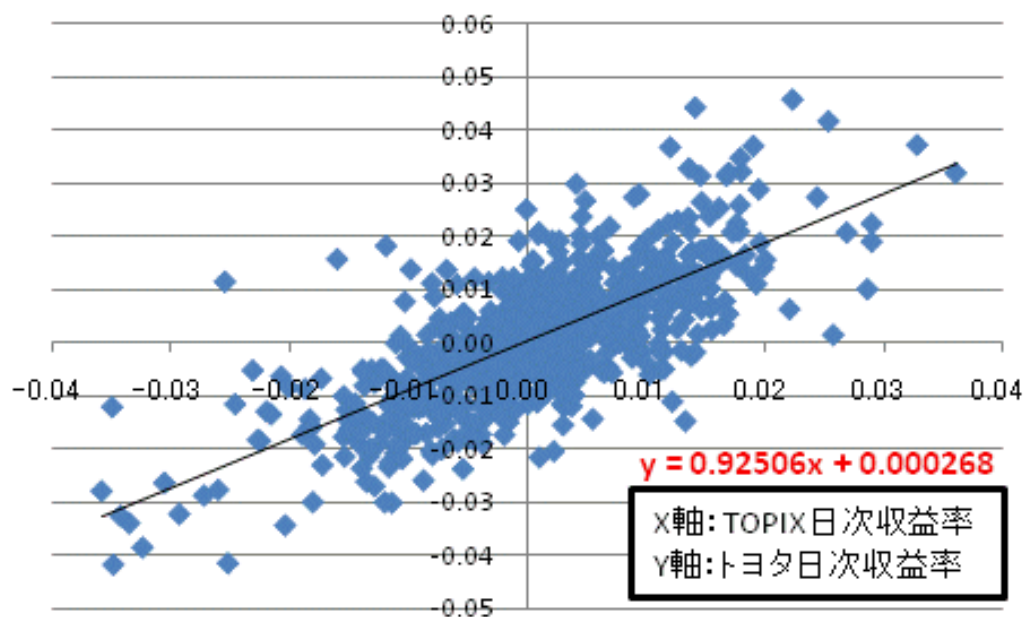


図 2：回帰分析による $\alpha \cdot \beta$ の推定

上図は、トヨタの日次株式投資収益率を Y 軸、TOPIX の日次株式投資収益率を X 軸にとり、3 年分のデータをプロットした図である。これに対して回帰分析を行うと、次表を得る。

表 1：回帰分析による $\beta \cdot \alpha$ の値

	係数	標準誤差
α (切片)	0.000268	0.000312
β (係数)	0.92506	0.031732

これに対し、以下で MCMC による $\alpha \cdot \beta$ の推定を行う。つまり、MCMC による $\alpha \cdot \beta$ の推定値が上表と一致（近似）すれば、MCMC の有効性が確認される。

第 2 章 MCMC を用いた $\alpha \cdot \beta$ の推定

2-1 MCMC を実行するためのソフトウェアについて

MCMC を実行するための有名なソフトウェアとして、「WinBUGS² (フリーソフト)」が挙げられる。本稿ではこの WinBUGS を使用して MCMC を実行することとする（もちろん日本語化されたソフトではない）。

ここで、WinBUGS を用いた MCMC の実行プロセスを明確にするためにも、プログラムの一部を以下に記載する。

```
#####
## MCMC のモデル設定
#####
model
{
    for(i in 1:N)
    {
        Y[i] ~ dnorm(mu[i],tau)
        mu[i] <- alpha + beta * X[i]
    }
    alpha ~ dnorm(0,1.0E-3)
    beta ~ dnorm(0,1.0E-3)
    tau ~ dgamma(1.0E-3,1.0E-3)
}
```

尤度の設定

事前分布の設定

² WinBUGS の HP : <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/> (2007/07/17 現在)

```
#####
## データ設定（一部略）
#####
list(Y = c(トヨタの日次収益率データ 3 年分),
X = c(TOPIX の日次収益率データ 3 年分),
N = 740)
#####
## 初期値の設定
#####
list(alpha = 0, beta = 0, tau = 0.011)
```

本稿で行った「MCMC を用いた $\alpha \cdot \beta$ の推定」においては、上記のプログラムを実際に使用した（一部省略）。このプログラムは、菅原（2004）と樋口（2002）を参考に作成した。国内にはこの 2 つのペーパー（研究会の講義資料）ぐらいしか、WinBUGS のプログラミングの方法について書かれているものはない。またこれらは、現実存在するデータに適用したものではないし、十分な説明はなされていない（5 枚程度）。

上記のプログラムを見て分かるように、MCMC のモデルを設定するために主に必要となるものは 2 つあり、①尤度の設定、②事前分布の設定、である。これらと、これに対応するデータさえあれば、MCMC を実行することが出来る。

では、以下にこれらの説明を行う。

2-2 尤度・事前分布・事後分布とは何か ベイズの定理を用いて

2-2-1 尤度・事前分布が必要となる理論的背景

未知のパラメータを θ 、既知として与えられるデータを Data と仮定したとき、尤度・事前分布・事後分布の関係は、以下の式のように表わされる。

$$p(\theta|\text{Data}) = \frac{p(\text{Data}|\theta)p(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\text{Data}|\theta)p(\theta)d\theta}$$

事後分布
尤度
事前分布

↑
基準化定数

上式を「ベイズの定理」という。この式の中の $p(\theta|\text{Data})$ を事後分布、 $p(\text{Data}|\theta)$ を尤度、 $p(\theta)$ を事前分布と呼ぶ。過去のデータ、及び新たに獲得したデータが与えられた後の分布が「事後」分布であり、その前（つまり過去のデータのみ）の分布が「事前」分布である。これらをつなぐのが、尤度である。

では、このベイズの定理はどのように導かれたのか。この導入法を下記に端的に示す。

$$p(\theta|\text{Data})p(\text{Data}) = p(\theta, \text{Data}) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (A)$$

これは、確率の定義である。左辺を定性的に解釈すると、「Data を選んだ時の確率に、それを選んだ下での θ を選んだ時の確率をかける」ということであり、それはつまり Data と θ を同時に選んだことに他ならない。

この式を θ について動かす。

$$\sum_{\theta} p(\theta, \text{Data}) = p(\text{Data}) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (B)$$

これは、 θ のすべてのパターン（確率）を考えるので1となり、つまり Data のみを考えていることと同じである。

では上式 (A) (B) からベイズの定理を導出する。(A) の左辺にある「 $p(\text{Data})$ 」を右辺に移項し、下記となる。

$$p(\theta|\text{Data}) = \frac{p(\theta, \text{Data})}{p(\text{Data})}$$

上式の分母に (B) を、分子に (A) を代入すると、下記になる。

$$p(\theta|\text{Data}) = \frac{p(\theta, \text{Data})}{p(\text{Data})} = \frac{p(\text{Data}|\theta)p(\theta)}{\sum_{\theta} p(\theta, \text{Data})} = \frac{p(\text{Data}|\theta)p(\theta)}{\sum_{\theta} p(\text{Data}|\theta)p(\theta)}$$

直観的に理解しやすくするために離散型で考えたから、分母が Σ になっているが、これを連続型にすれば「 Σ 」は「 $\int$ 」になり、ベイズの定理が導出される。

$$p(\theta|\text{Data}) = \frac{p(\text{Data}|\theta)p(\theta)}{\sum_{\theta} p(\text{Data}|\theta)p(\theta)} = \frac{p(\text{Data}|\theta)p(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\text{Data}|\theta)p(\theta)d\theta}$$

右辺の分母（つまり「 $\int_{-\infty}^{\infty} p(\text{Data}|\theta)p(\theta)d\theta$ 」）は「基準化定数」と呼ばれ、一定の値（ $p(\text{Data})$ ）をとるため、下記のように書き直されることが多い。

$$p(\theta|\text{Data}) \propto p(\text{Data}|\theta)p(\theta)$$

$$\text{事後分布} \propto \text{尤度} \times \text{事前分布}$$

つまりこの式によれば、求めたい事後分布は、尤度と事前分布から求められることがわかる。WinBUGS を利用する際、①尤度の設定、②事前分布の設定、の 2 つのステップが必要であったのは、このためである。

2-2-2 実際に必要となる作業

①「尤度」のプログラミング

本稿では、尤度のプログラミングを下記のようにした。

```
Y[i] ~ dnorm(mu[i],tau)
mu[i] <- alpha + beta * X[i]
```

このプログラムの意味を文章にして書くと、次のようになる。

1 行目: Y[i] (トヨタの株式投資収益率) を正規分布 (平均 mu[i]、分散の逆数³ tau) と仮定する。

2 行目: Y[i] は先ほど平均 mu[i] の正規分布と仮定したが、この mu[i] とは「alpha + beta * X[i]」という形をしている。

つまり 2 行目は 1 行目を説明するものであるから、ここでは 1 行目を記述しなければならない理由について記述する。

今回の実践例で求めたいものは、新たなデータが与えられた下での「 $\beta \cdot \alpha$ 」の推定値である。つまり、「事後分布 $p(\beta \cdot \alpha | \text{Data})$ 」である。ここで、ベイズの定理について考える。

$$\begin{array}{ccc} \text{事後分布} & \text{尤度} & \text{事前分布} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p(\beta \cdot \alpha | \text{Data}) \propto p(\text{Data} | \beta \cdot \alpha) p(\beta \cdot \alpha) \end{array}$$

ここで言う「Data」とは Y[i] を指す。Data の中に X[i] を含まない理由は、Y[i] を考える際に X[i] が含まれているためである (誤解を恐れずイメージしやすいように書くと、 $Y[i] = \alpha + \beta \cdot X[i]$ となるからである)。

³ 通常、正規分布を仮定するとき、N(平均, 分散) という形で与えることが多い。しかし、WinBUGS では分散の逆数を与えることに、十分注意する必要がある。

つまり、「 $p(\beta \cdot \alpha | Y[i]) \propto p(Y[i] | \beta \cdot \alpha) p(\beta \cdot \alpha)$ 」と書き直すことが出来る。

この式の尤度「 $p(Y[i] | \beta \cdot \alpha)$ 」の意味は、 β と α が与えられた下での $Y[i]$ の確率である。だから、 α と β を利用して $Y[i]$ の確率分布を指定するプログラミングを書く必要性がある。以上のように考えた結果、上記のプログラムを書いた。

既存の文献（レポート）である菅原（2004）と樋口（2002）では、「なぜこのプログラムを書かなくてはならないか」という本質的な部分が抜け落ちており、本稿ではこの部分を論理的に説明しようと試みた。（著者を含む初学者には、この観点が必要になると考える。）

②「事前分布」のプログラミング

事前分布の設定に関しては「3-2 MCMC の柔軟性の検証」で議論する。端的に言う
と、事前に得られた情報から妥当と判断される事前分布を設定すれば、事前分布が異な
ったとしても、正しい値に収束されることが、本稿の実験から理解された。つまり、 β
の値が 10（または-10）になる企業など考えられず、おそらく高々3（または-3）で
あると予想される。それならば、これを考慮した事前分布の設定を行えば、MCMC は
正しい値へ収束する。

2-3 WinBUGS を実行した結果

以上のようなプログラムを実行し、下記の結果を得た。

表 2：WinBUGS を実行した結果（MCMC における基本統計量）

	平均	標準偏差	MC error
alpha	0.0002656	0.0003172	0.0000018
beta	0.9248000	0.0323900	0.0001800

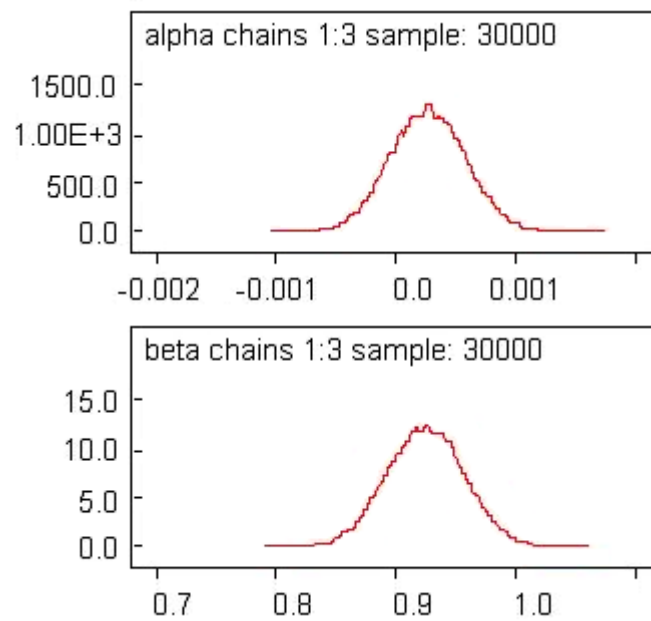


図 3 : MCMC による $\alpha \cdot \beta$ の事後分布の推定

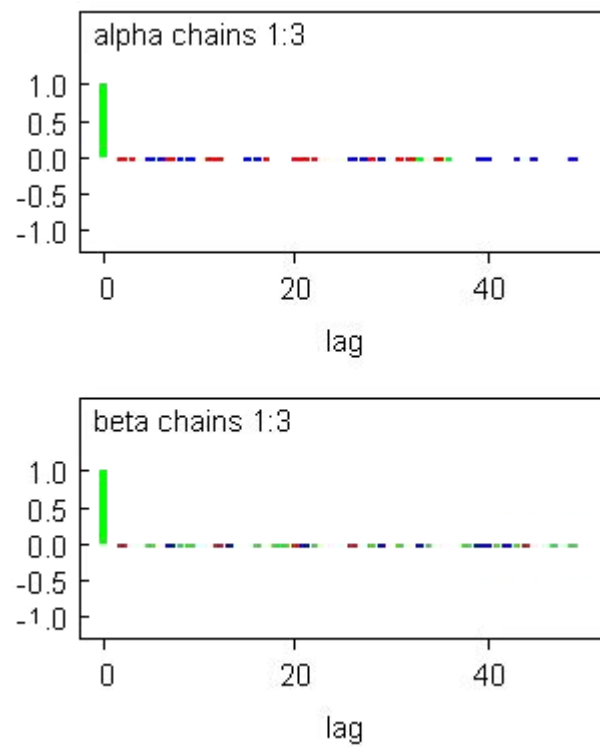


図 4 : 自己相関について

以上の図表が、MCMC の結果を解釈する上で特に重要となる。

表 2 で確認すべきは 2 点ある。1 点目は「① $\alpha \cdot \beta$ の推定値（事後平均と事後標準偏差）の確認」である。2 点目は「② MC error の値が事後標準偏差よりも十分に小さいかの確認」である。今回、事後の標準偏差 $\gg$ MC error であることより、この MCMC の結果は信頼に足ると言える。

また図 3 では、MCMC を利用して求めたかった $\alpha \cdot \beta$ の事後確率分布が視覚的に把握することが出来る。

図 4 は自己相関（Autocorrelation）を示したものである。MCMC を行う際、「マルコフ連鎖」を用いる。マルコフ連鎖とは簡単に言うと「1 期前以外からの影響は受けない」というものである（重要な概念であるから、「2-3-1 マルコフ連鎖とは」で詳しく述べることとする）。図 4 を見ると、2 期前よりあとに相関関係が見られないため、マルコフ連鎖を用いた MCMC をするのは適正だと考えられる。

2-3-1 マルコフ連鎖とは

「マルコフ連鎖」とは、以下の式のように示される。

$$P(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = P(x_n | x_{n-1})$$

これは何を意味するのか。左辺は、全ての過去の値（つまり $x_1 \sim x_{n-1}$ ）を与えたときの $P(x_n)$ の値である。また右辺は、直近のデータ（つまり x_{n-1} のみ）を与えたときの $P(x_n)$ の値である。この両辺が一致するのであるから、直近以外の過去のデータ（ $x_1 \sim x_{n-2}$ ）は、 $P(x_n)$ に何の影響を及ぼさないと分かる。言い換えれば、直近のデータのみ現時点に影響を与えると言える。この時、 $P(x_n | x_{n-1})$ を推移核と呼ぶ。

この「マルコフ連鎖」の特徴を利用して、事後分布から無数の乱数を生成する。そして、無数の乱数を集積すると 1 つの分布が形成されるため、求めたいパラメータの期待値・分散等を求めることが出来る。

事後分布から乱数（モンテカルロ標本）を発生させる方法をマルコフ連鎖サンプリング法という。乱数の生成法⁴は以下の通りである。

初期分布 = $p(x_1)$ 推移核 $Q = p(x_n|x_{n-1})$ と設定する。

A) $p(x_1)$ から乱数 $\tilde{x}_1$ を生成する。

B) $p(x_2|\tilde{x}_1)$ から乱数 $\tilde{x}_2$ を生成する。

⋮

C) $p(x_n|\tilde{x}_{n-1})$ から乱数 $\tilde{x}_n$ を生成する。

つまり、これを図示するとこのようになる。

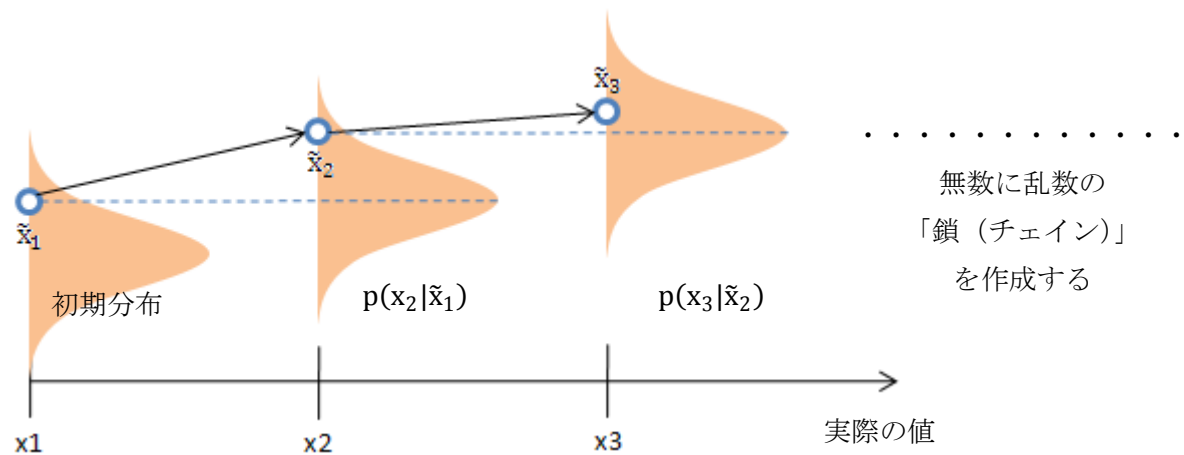


図 5：マルコフ連鎖を利用した乱数生成法

つまり最初は初期分布から 1 点を選び ($\tilde{x}_1$)、次に、この値と次の実測値 (x_2) から確率分布を作成し ($p(x_2|\tilde{x}_1)$)、この分布に従って 1 点をランダムに選ぶという作業を繰り返し行うことで、「 $\tilde{x}_1 \rightarrow \tilde{x}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{x}_n$ 」という乱数のチェーンが生成される。

⁴中妻照雄（2007）から引用、一部改編した。

ではここで、乱数のチェーンの様子を見るため、WinBUGS の出力に話を戻す。

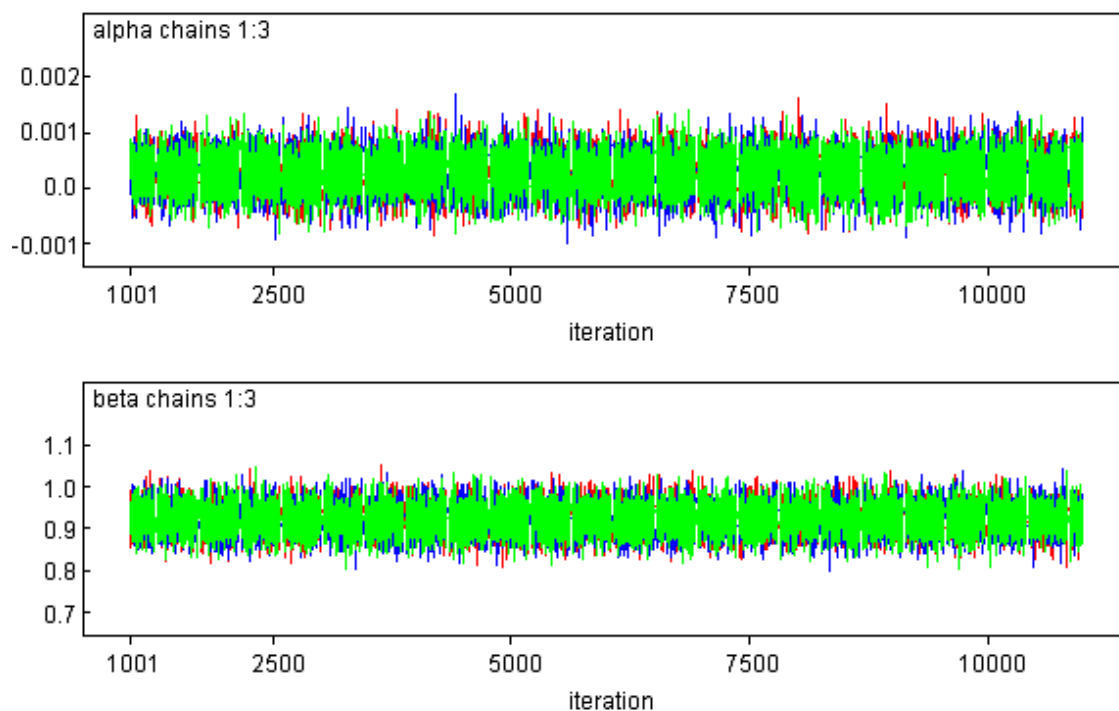


図 6 : MCMC のチェーンを観察する

上図は 3 色の線から構成されていることが分かる。これは、3 本の乱数のチェーンを作成したためである。

ここで注目すべきなのは、チェーンが「1001」からスタートしていることである。これは図 5 を見ると分かるが、最初の値は初期分布から求めているため、完全な乱数とは言えない。ある一定区間（今回は 1000 回）は乱数としては採用しないで捨てているため、1001 回目からとなっている。この捨てる期間のことをバーンイン（Burn - in）という。

第 3 章 回帰分析・MCMC の推定結果の比較

3-1 MCMC を用いた $\alpha \cdot \beta$ の推定は回帰分析の結果と一致するのか

ここで、当初の目的に立ち返る。「MCMC による $\alpha \cdot \beta$ の推定値が、回帰分析によるものと一致 (近似) すれば、MCMC の有効性が確認される」とした上で分析をスタートした。

そこで表 3 に、2 種類の方法で求めた $\alpha \cdot \beta$ の結果についてまとめた。誤差の列を確認すると、極めて微小な差異があるが、これはほぼ一致したと考えていいと思う。

つまりこの結果から、MCMC が有効・有用な手法であることがわかった。

表 3 : 回帰分析による結果と MCMC による結果の比較

	推定方法		
	回帰分析	MCMC	誤差
α	0.0002681	0.0002656	0.0000025
β	0.9250599	0.9248000	0.0002599

3-2 MCMC の柔軟性の検証

MCMC を WinBUGS で実行する際、①尤度の設定、②事前分布の設定、という 2 つ事柄について設定をしなくてはならない。

ここで、1 つ疑問が湧いてくる。「②事前分布の設定」を変えると、結果が全く異なってしまうのではないか。もし結果が変わるのならば、未知のパラメータについても厳格な調査を行った上で、慎重に MCMC を実行しなくてはならない。これではとても使い勝手の悪い道具である。もちろん、「①尤度の設定」に関しては、分析したい内容によって一意に決定されるため、変更する余地がない。

では、事前分布はどのような形状をしていたか。この事前分布の形状を変化させ (つまり初期値を変更し)、その結果を示す。

< 上記で実行した時の事前分布 >

$\alpha \sim \text{dnorm}(0, 1.0\text{E-}3)$

$\beta \sim \text{dnorm}(0, 1.0\text{E-}3)$

$\tau \sim \text{dgamma}(1.0\text{E-}3, 1.0\text{E-}3)$

ここで以下の記述を分かりやすくするため、分布の形状を $\text{dnorm}(A, B)$ 、または $\text{dgamma}(A, B)$ とおく。そして A と B について変化させて、MCMC の結果に差異が生まれてしまうのか検討する。

- Alpha の A を 0～10 まで変化させる : 結果 表中の値はすべて同じ

表 4 : 初期値を変えても正しい値に収束するか①

	alpha			beta		
	mean	sd	MC error	mean	sd	MC error
alpha の $A=0$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $A=1$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $A=2$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $A=3$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
§		§			§	
alpha の $A=10$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04

- Alpha の B を $1.0\text{E-}3 \sim 10$ まで変化させる : 結果 表中の値はすべて同じ

表 5 : 初期値を変えても正しい値に収束するか②

	alpha			beta		
	mean	sd	MC error	mean	sd	MC error
alpha の $B=1.0\text{E-}3$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $B=1.0\text{E-}2$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $B=1.0\text{E-}1$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $B=1$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04
alpha の $B=10$	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	0.9248	0.03239	1.80E-04

- Beta の A を 0~10 まで変化させる : 結果 表中の値はすべて同じ

	alpha			beta		
	mean	sd	MC error	mean	sd	MC error
betaのA=0	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06
betaのA=1	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06
betaのA=2	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06
§		§			§	
betaのA=10	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06	2.66E-04	3.17E-04	1.84E-06

様々な事前分布を当てはめても、正しい値(回帰分析による $\alpha \cdot \beta$ の値)に収束する。

ここで、 β の性質上、とることが想定できないような値をとらせて実験する。

- Beta について極端な値をとらせる : 結果 若干の誤差が生まれる

	alpha			beta		
	mean	sd	MC error	mean	sd	MC error
betaのA=10 B=10	2.06E-04	3.19E-04	1.86E-06	1.02	0.03277	1.86E-04
betaのA=5 B=5	2.52E-04	3.17E-04	1.85E-06	0.9461	0.03233	1.80E-04

以上の分析から、未知のパラメータについての事前の情報があれば、それに基づいた事前分布を仮定すれば、正しい値に収束すると言える。また、たとえ全く分からなかったとしても、確かに多少の誤差は生まれてしまうが、極めて近い値に収束する。

第 4 章 結論と残された課題

本稿では、「回帰分析によって求めた $\alpha \cdot \beta$ の値が、MCMC によって求めた値と一致（近似）するか」について検討することを通じて、MCMC の有効性を証明した。同時に、事前分布の初期設定のいかんによって結果が大きく異なる可能性がないことを実証した。また日本国内では未だめったに存在していない MCMC の実例提示（現実のデータに対して適用した WinBUGS のプログラム例も同時に提示）とその解説を、MCMC の理論を踏まえた上で行った。

残された課題・論点としては 3 点ある。すなわち、①現在の株式投資収益率は直近より前からの影響を受けないだけでなく直近の影響さえ受けない⁵がこれを「マルコフ連鎖」と考えていいのかということ、②WinBUGS の処理の仕方についての文献が少なく完璧なプログラムであるとの確証がないこと、③英語の文献に使われている単語を日本語訳する際に正確であるか不安であること、である。

これらの問題について十分に改善した上で、本稿を現段階よりも昇華させ、卒業論文につなげたいと考える。

⁵ つまり、「株式投資収益率はランダムである」ということを意味する。株式投資収益率のランダム性に関する議論は、安達・斎藤（1992）において詳しく行われている。

<参考文献・URL>

● 参考文献・資料

- [1]安達智彦・斎藤進 (1992) :『セミナー 現代のポートフォリオ・マネジメント』同文館出版
- [2]伊庭幸人 (2003) :『ベイズ統計と統計物理』岩波書店
- [3]梶田幸作 (2007) :『WinBUGS の使い方—サンプル : Seeds を用いて—』(未刊行論文)
- [4]梶田幸作・風岡宏樹 (2007) :『WinBUGS の導入手順について』(未刊行論文)
- [5]Gary Koop (2003) :『Bayesian Econometrics』WILEY
- [6]Christian Assemurg (2007) :『An Introduction to Using WinBUGS for Cost-Effectiveness Analyses in Health Economics』University of York 講義資料 (2007/07/17 現在)
- <http://www.york.ac.uk/inst/che/pdf/2%20Practical%201%20talk.pdf>
- [7]サイモン・ベニンガ (2005) :『ファイナンシャルモデリング』清文社
- [8]菅原慎矢 (2004) :『WinBUGS 1.4 入門』東京大学経済学部大森裕浩ゼミ 講義資料 (2007/07/17 現在)
- <http://www2.e.u-tokyo.ac.jp/~omori-s/source/bugs/winbugs.pdf>
- [9]ツヴィ・ボディ,ロバート・C・マートン (2005) :『現代ファイナンス論』ピアソン・エデュケーション
- [10]中妻照雄 (2007) :『入門 ベイズ統計学』朝倉書店
- [11]樋口仁康 (2002) :『MCMC/WinBUGS の研究』岡山理科大学 山本英二研究室 (2007/07/17 現在)
- <http://zeus.mis.ous.ac.jp/sotsuken/2002/yokouhiguchi.pdf>
- [12]牧厚志・和合肇・西山茂・人見光太郎・吉川肇子・吉田栄介・濱岡豊 (2005) :『経済・経営のための統計学』有斐閣
- [13] 和合肇 (2005) :『ベイズ計量経済分析 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社

● 参考 URL・参考データベース

- [1]AMSUS (日経 QUICK 社)
- [2]WinBUGS (2007/07/17 現在) : <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>